

Guida all' Astrofisica Galattica

Lorenzo Zaninetti
zaninetti@ph.unito.it
Dipartimento di Fisica Generale
Edizione III

Introduzione

Questo dispense vogliono essere un ponte fra le dispense dello studente [Marchetti 1990] ed i testi avanzati. Comunque alcune tematiche non sono affatto banali e del software molto specialistico è stato sviluppato per tracciare i diagrammi HR , oppure relazioni B-V contro T , correzione bolometrica , etc. Queste dispense vanno consultate insieme alla HOME-PAGE dell'autore a www.ph.unito.it/~zaninett seguendo il percorso *ASTRONOMIA VIRTUALE*

Indice

Introduzione	iii
1 Le scale di Base	1
1.1 Grandezze astronomiche	1
1.1.1 Valutazione della massa del Sole	5
1.1.2 Valutazione del raggio solare	5
1.2 Distanze stellari	6
2 Processi Radiativi	9
2.1 Il flusso della radiazione	9
2.1.1 Flusso da una sorgente isotropa	10
2.2 Intensità specifica	11
2.2.1 Flusso netto e momento del flusso	11
2.2.2 Densità di energia radiante	12
2.2.3 Pressione di radiazione in un campo isotropo	14
2.2.4 Costanza Intensità	14
2.2.5 Sfera uniforme	15
2.3 Trasferimento della radiazione	16
2.3.1 Emissione	16
2.3.2 Assorbimento	17
2.3.3 Equazione del trasferimento radiativo	18
2.3.4 Solo Emissione	19
2.3.5 Solo Assorbimento	19
2.3.6 Profondità ottica e funzione sorgente	19
2.3.7 Libero cammino medio	21
2.3.8 La forza della radiazione	22
2.4 La radiazione termica	23
2.4.1 Radiazione di corpo nero	23
2.4.2 Legge di Kirchhoff per l'emissione termica	24

2.5	Lo spettro di Planck	25
2.5.1	Proprietà della legge di Planck	27
2.5.2	La legge di Rayleigh-Jeans	28
2.5.3	La legge di Wien	29
2.5.4	Monotonicità con la temperatura	29
2.5.5	La legge dello spostamento di Wien	29
2.5.6	La relazione fra le costanti fondamentali	30
2.6	Temperature caratteristiche	31
2.6.1	Temperatura di brillantezza	31
2.6.2	Temperatura di colore	32
2.6.3	Temperatura effettiva	32
3	Astronomia Stellare	33
3.1	La Radiazione Stellare	33
3.2	Sistemi di magnitudine	35
3.3	Temperatura effettiva e di colore	39
3.4	La magnitudine assoluta	40
3.5	La magnitudine bolometrica	41
3.6	Luminosità, raggi e masse stellari	42
3.7	B-V contro T, teorico	44
3.7.1	B-V analitico	45
3.7.2	B-V numerico	45
3.8	Correzione bolometrica numerica	46
3.9	Correzione bolometrica analitica	46
3.10	I primi 100 pc	47
3.11	Diagramma HR	48
3.12	Diagramma HR in ammassi	50
3.13	Diagramma a due colori	51
3.14	Relazione massa-luminosità	52
4	Spettroscopia Stellare	57
4.1	L' Atomo di idrogeno	57
4.2	Classificazione degli spettri stellari	64
4.2.1	Il sistema MK	68
5	Evoluzione Stellare	73
5.1	Il Sole - quadro generale	73
5.2	Struttura del Sole	75

A	Costanti	77
B	Calibrazioni	81

Capitolo 1

Le scale di Base

In questo capitolo si forniscono le nozioni basilari che sono necessarie per poter procedere nello studio dei corpi celesti, cercando di non perdere del tutto di vista l'evoluzione storica dell'astronomia. In un primo momento si definiscono le grandezze principalmente usate in questa scienza, poi si volge lo sguardo al sistema solare.

1.1 Grandezze astronomiche

Fin dai tempi antichi, lo studio e la valutazione del moto degli astri, ha suscitato negli uomini un vivo interesse. Le prime misure quantitative giungono dai tempi dell'antica Grecia e portano la firma di astronomi famosi quali Eratostene, Anassagora e Aristarco di Samo. Fu proprio Aristarco [Heath 1991] a suggerire un metodo ingegnoso per misurare la distanza fra Terra e Sole: la grandezza che oggi è chiamata *Unità di grandezza astronomica* ed è indicata con il simbolo UA.

Poichè la dimensione angolare della Luna e del Sole non cambiano apprezzabilmente con il tempo se ne deduce che essi mantengono distanze costanti dalla Terra (le orbite sono circolari). Dalla figura 1.1 è chiaro che

$$\frac{D_{\odot}}{D_{\ominus}} = \cos(\theta) \quad , \quad (1.1)$$

dove 2θ è l'angolo sotteso alla terra fra la posizione della luna al primo quarto e quella al terzo quarto, dove D_{\odot} è la distanza terra-luna e D_{\ominus} la distanza terra-sole.

Sfortunatamente l'angolo θ risulta essere troppo vicino a 90°

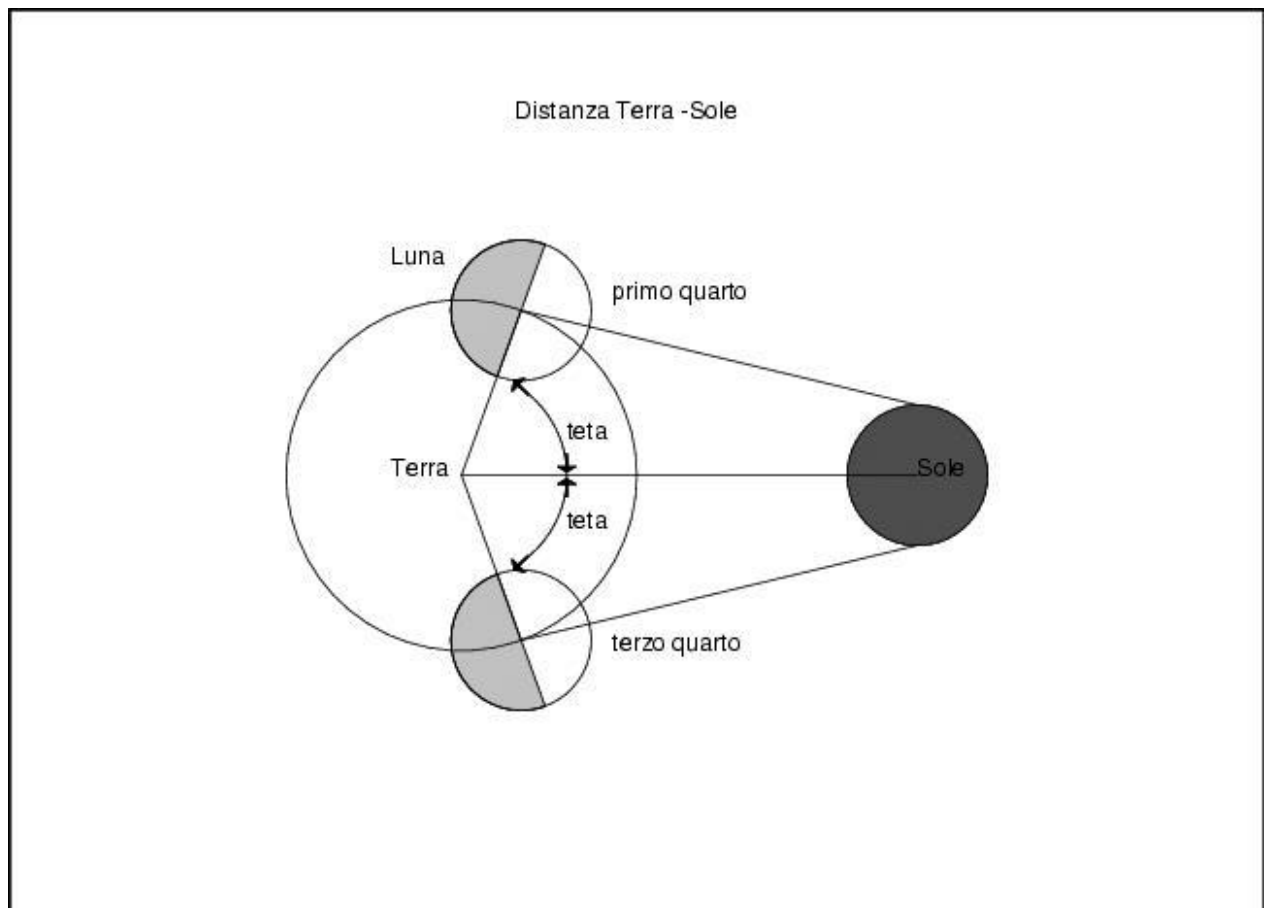


Figura 1.1: Contesto distanza Terra-Sole

per essere misurato con metodi elementari. Misure moderne che adoperano le riflessioni radar trovano $\frac{D_{\odot}}{D_{\oplus}} = 2.6 \cdot 10^{-3}$. Cosicchè il sole è 390 più distante della luna.

Quindi per ottenere UA è sufficiente conoscere la distanza Terra-Luna . Essa si ottiene facilmente in conseguenza a due considerazioni:

1. dalla Terra, Luna e Sole appaiono circa uguali
2. durante l'eclissi di Luna , il cono d'ombra proiettato dalla Terra contiene la Luna due volte

Si ha

$$D_{\odot} \approx 70 R_t \quad , \quad (1.2)$$

Dove R_t è il raggio terrestre . Il raggio terrestre si può calcolare con il metodo di Eratostene: egli notò che quando il sole ad Assuan era allo zenith (che è sullo stesso meridiano, ma più a nord) era inclinato di un angolo δ . Nota la distanza fra le due città si ha il raggio della Terra ;

$$R_t = \frac{D_{\odot}}{\delta} \quad , \quad (1.3)$$

con δ espresso in radianti.

I risultati sono :

$$\begin{array}{ll} R_t &= 6300 \text{ Km} \\ D_{\odot} &= 400000 \text{ Km} \\ UA &= 1.510^8 \text{ Km} \end{array}$$

L'UA viene oggi calcolata con un metodo differente: si considera la Terra e un asteroide in opposizione, vedi figura 1.2 Sia a l'unità astronomica, a_p la distanza dell'asteroide dal Sole e x la distanza tra Terra e l' asteroide. Per la terza legge di Keplero che dice che, per un corpo in orbita intorno al sole, la distanza al cubo è proporzionale al periodo al quadrato, si ha (misurando il periodo in anni)

$$\frac{a_p}{a} = P^{2/3} \quad (1.4)$$

dove P è il periodo dell' asteroide, da cui

$$a_p = a + x = a P^{2/3} \quad (1.5)$$

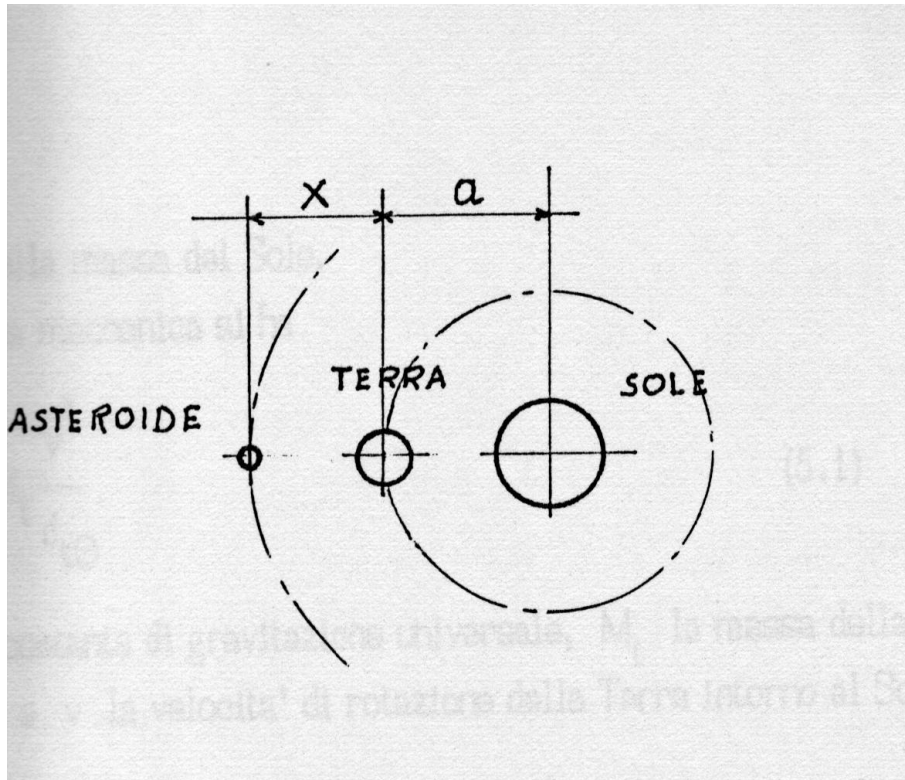


Figura 1.2: Calcolo UA

ovvero

$$a = \frac{x}{P^{2/3} - 1} \quad (1.6)$$

Occorre perciò misurare soltanto la distanza x tra Terra ed asteroide : per fare ciò si inviano onde radar verso l' asteroide che vengono riflesse sulla Terra e dalla misura del tempo t che intercorre tra l'emissione e la ricezione si valuta

$$x = c \frac{t}{2} \quad (1.7)$$

da cui si ottiene UA.

1.1.1 Valutazione della massa del Sole

Dalle leggi della meccanica si ha

$$G \frac{M_{\oplus} M_{\odot}}{d_{\oplus \odot}} = M_{\oplus} \frac{v^2}{d_{\oplus \odot}} \quad , \quad (1.8)$$

dove G è la costante di gravitazione universale , M_{\oplus} la massa della terra , M_{\odot} quella del sole e v la velocità di rotazione della terra intorno al Sole, inoltre

$$v = \frac{2\pi}{T} d_{\oplus \odot} \quad , \quad (1.9)$$

e quindi

$$M_{\odot} = \frac{4\pi^2}{T^2} d_{\oplus \odot} \frac{1}{G} \quad . \quad (1.10)$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$M_{\odot} = 210^{33} g \quad . \quad (1.11)$$

1.1.2 Valutazione del raggio solare

Noto il raggio angolare α [in radianti] e la distanza $d_{\oplus \odot}$ si ha essendo α molto piccolo

$$R_{\odot} = d_{\oplus \odot} \alpha \quad , \quad (1.12)$$

da cui

$$R_{\odot} = 710^{10} cm \quad . \quad (1.13)$$

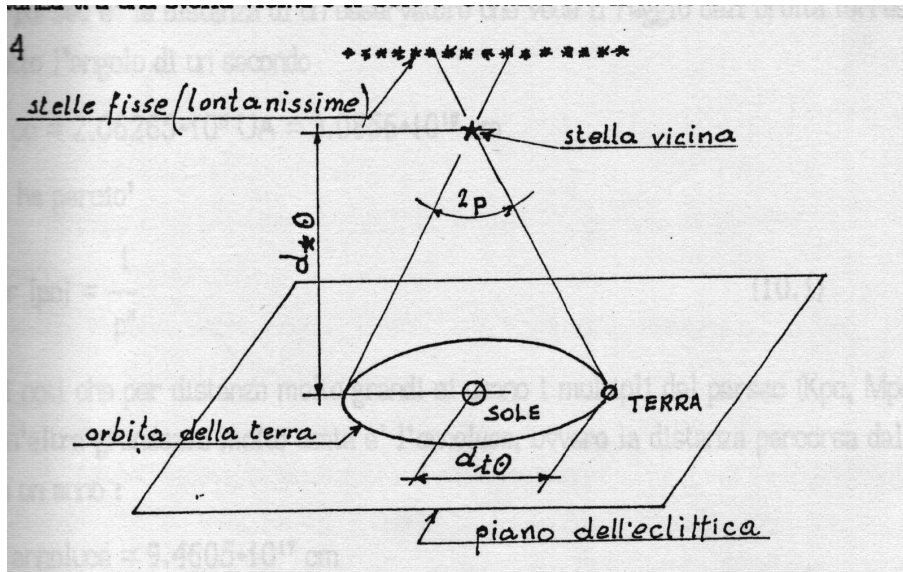


Figura 1.3: Sistema Sole-Terra e stella

1.2 Distanze stellari

Le stelle distano dal sole molto più di quanto il sole dista dalla Terra e perciò è necessario definire unità di distanza molto più grandi dell' UA. Le stelle più vicine al Sistema Solare, nell' arco dell'anno , appaiono dalla Terra in rotazione su orbite circolari o ellittiche o addirittura in oscillazione lungo una retta; questo moto apparente è dovuto alla rotazione della Terra intorno al Sole su un piano detto piano dell' eclittica : le stelle perpendicolari a tale piano descrivono cerchi, quelle inclinate descrivono ellissi e quelle complanari delle rette. Chiaramente tali moti sono evidenti tenendo come riferimento stelle molto lontane che possono essere considerate fisse. La distanza tra una stella vicina e il Sole è stimata con il metodo indicato nella figura 1.3 e l'angolo $2p$ è quello con cui un osservatore posto sulla stella vede l' orbita terrestre , che coincide con l' angolo sotto cui l' osservatore terrestre vede il moto apparente della stella . Il moto della stella è stimato facendo molte fotografie durante l' anno. Trigonometricamente la distanza sarà

$$d_{\oplus\odot} = d_{*\odot} \operatorname{tg} p \quad , \quad (1.14)$$

da cui

$$r = \frac{d_{\oplus\odot}}{\operatorname{tg} p} \quad . \quad (1.15)$$

Se p è espresso in radianti, essendo $\operatorname{tg} p \approx p$ si ha

$$r[UA] = \frac{1}{p} = \frac{2.06265 \cdot 10^5}{p''} \quad . \quad (1.16)$$

Ricordiamo che il *parsec* fu adottato nel 1922 dall' Unione Internazionale Astronomica (IAU) per specificare le distanze stellari in funzione della distanza media Terra-Sole . Con i satellite interplanetari e misurazione dei tempi di riflessione conosciamo le scale del sistema solare con una precisione di una parte per milione (ppm) ; il *parsec* viene tenuto per motivi storici[Sparke et al. 2000].

Capitolo 2

Processi Radiativi

Fù scoperto abbastanza presto (Newton 1672) che la radiazione elettromagnetica può essere decomposta in uno spettro di componenti fondamentali da un prisma, un reticolo oppure qualche altra apparecchiatura. Lo spettro corrisponde alle onde di varie lunghezza d'onda, legate dalla relazione $\lambda\nu=c$ dove ν è la frequenza dell'onda, λ la sua lunghezza d'onda e $c = 3 \cdot 10^{10} \text{cms}^{-1}$ è la velocità della luce nel vuoto (per onde che non viaggiano nel vuoto c è rimpiazzata dalla appropriata velocità nel mezzo). Possiamo dividere lo spettro in varie regioni come indicato nella Figura 2.1; per convenienza abbiamo anche inserito l'energia $E = h\nu$ e la temperatura $t=E/k$ associata con ogni lunghezza d'onda.

Ricordiamo che $h = 6.625 \cdot 10^{-27} \text{ erg s}$ è la costante di Planck e $k = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/K}$ è la costante di Boltzmann. Questa carta può rivelarsi utile nel convertire delle unità o nell'avere una visione rapida del valore delle quantità in una certa parte dello spettro. Le frontiere fra le varie regioni sono in qualche modo arbitrarie ma conformi all'uso che ne fanno gli astrofisici.

2.1 Il flusso della radiazione

Quando la scala del sistema eccede la lunghezza d'onda della radiazione possiamo dire che la radiazione viaggia in linea retta (i raggi) nello spazio libero o in un mezzo omogeneo: questo basta per erigere una teoria. Uno dei concetti primitivi è quello di *flusso di energia*: considerate un elemento di area dA esposto alla radiazione per un tem-

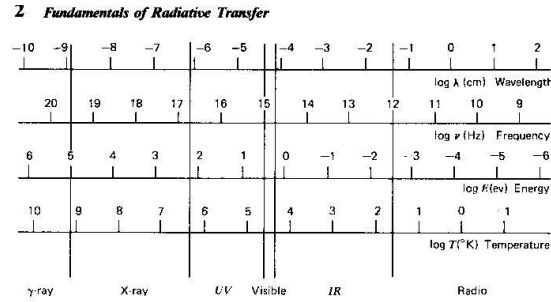


Figure 1.1 The electromagnetic spectrum.

1.2 RADIATIVE FLUX

Figura 2.1: Lo spettro elettromagnetico

po dt . La quantità di energia che passa attraverso ad un elemento sarà proporzionale a $da dt$ e lo scriviamo come $F dA dt$. Il flusso di energia è normalmente misurato in $ergs^{-1}cm^{-2}$. Notate che F può dipendere dall' orientamento dell' elemento.

2.1.1 Flusso da una sorgente isotropa

Una sorgente di radiazione è chiamata isotropa se emette energia in modo uguale in tutte le direzioni; un esempio in simmetria sferica sarebbe una stella. Se mettiamo un a superficie sferica S_1 ed S ad un raggio r_1 e r rispettivamente rispetto alla sorgente, sappiamo dalla conservazione dell' energia che l' energia totale passante attraverso S_1 deve essere la stessa che passa attraverso S . Assumiamo ovviamente che che non ci siano guadagni o perdite passando da S a S_1 . Cosicché

$$F(r_1)4\pi r_1^2 = F(r)4\pi r^2 \quad , \quad (2.1)$$

oppure

$$F(r) = \frac{F(r_1)r_1^2}{r^2} \quad , \quad (2.2)$$

se supponiamo la sfera S_1 essere fissa:

$$F = \frac{costante}{r^2} \quad . \quad (2.3)$$

Questo è semplicemente il concetto di conservazione dell' energia.

2.2 Intensità specifica

Il flusso è una misura dell' energia portata da tutti i raggi passanti attraverso un' area data. Una descrizione più dettagliata è possibile descrivendo la radiazione come l' energia portata dai raggi singoli. La prima cosa da realizzare però è che un raggio singolo non porta energia , cosicchè dobbiamo considerare l' energia di un insieme di raggi, che differisce in modo infinitesimale da un raggio dato. Possiamo usare la seguente definizione: costruite un' area dA normale alla direzione del raggio dato e considerate tutti i raggi che passano attraverso dA la cui direzione è in un angolo solido $d\Omega$ del raggio dato. L' energia che attraversa dA nel tempo dt e nell' intervallo di frequenza $d\nu$ è poi definita dalla relazione:

$$dE = I_\nu dA dt d\Omega d\nu \quad , \quad (2.4)$$

dove I_ν è l' intensità specifica oppure brillantezza. L' intensità specifica ha dimensione :

$$\begin{aligned} I_\nu(\nu, \Omega) &= \text{energia}(\text{tempo})^{-1}(\text{area})^{-1}(\text{angolo solido})^{-1}(\text{frequenza})^{-1} \\ &= \text{ergs } s^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ ster}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \quad . \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.2.1 Flusso netto e momento del flusso

Supponiamo adesso che abbiamo un campo di radiazione (raggi in tutte le direzioni) e ipotizziamo la costruzione di un piccolo elemento di area dA in qualche direzione arbitraria \mathbf{n} , vedi figura 2.2 Allora il differenziale del flusso dall' angolo solido $d\Omega$ è ridotto dall' area effettiva $\cos(\theta)dA$

$$dF_\nu(\text{ergs}^{-1}\text{cm}^{-2}\text{Hz}^{-1}) = I_\nu \cos(\theta)d\Omega \quad (2.6)$$

Il flusso netto nella direzione \mathbf{n} , $F_\nu \mathbf{n}$ è ottenuto integrando dF su tutto l' angolo solido.

$$F_\nu = \int I_\nu \cos(\theta) d\Omega \quad . \quad (2.7)$$

Notate che se I_ν è un campo di radiazione isotropa (ovverosia non dipende dall' angolo) allora il flusso netto è zero poichè $\int \cos(\theta)d\Omega=0$. Vale a dire che c' è tanta energia nella direzione \mathbf{n} come nella direzione $-\mathbf{n}$. Per ottenere il flusso del momento nella direzione normale

where I_ν is the *specific intensity* or *brightness*. The specific intensity has

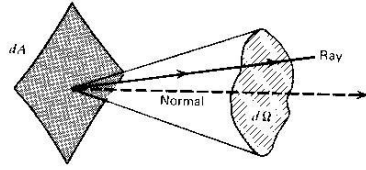


Figure 1.2 Geometry for normally incident rays.

Figura 2.2: Geometria dei raggi incidente obliqui

a dA (momento per tempo unitario per unità di area = pressione) ricordiamoci che il momento del fotone è E/c . Allora il momento del flusso lungo un raggio ad angolo θ è dF_ν/c . Per ottenere la componente del flusso normale a dA , moltiplichiamo per un'altro fattore $\cos(\theta)$. Integrando otteniamo :

$$p_\nu(\text{dynes cm}^{-2} \text{Hz}^{-1}) = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2(\theta) d\Omega \quad . \quad (2.8)$$

Notate che F_ν e p_ν sono momenti (ovverosia moltiplicazione di potenze di $\cos(\theta)$ ed integrazione su $d\Omega$) dell'intensità I_ν . Ovviamente possiamo integrare sulla frequenza per ottenere il flusso totale più allegati

$$F(\text{ergs s}^{-1} \text{cm}^{-2}) = \int F_\nu d\nu \quad , \quad (2.9)$$

$$p(\text{dynes cm}^{-2}) = \int p_\nu d\nu \quad (2.10)$$

$$I(\text{ergs s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{ster}^{-1}) = \int I_\nu d\nu \quad (2.11)$$

2.2.2 Densità di energia radiante

La densità specifica di energia u_ν è definita come l'energia per unità di volume per unità di frequenza. Per determinarla è conveniente prima considerare la densità di energia per unità di angolo solido $u_\nu(\Omega)$

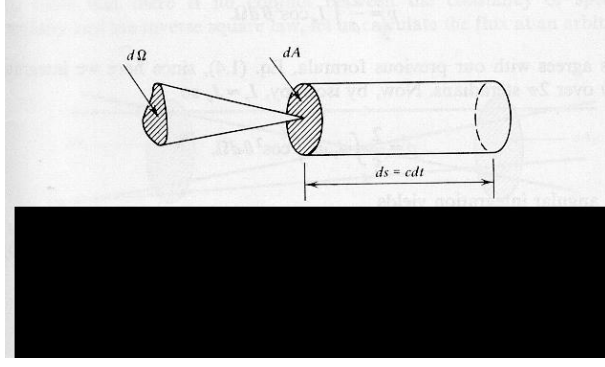


Figura 2.3: Energia elettromagnetica nel cilindro

attraverso $dE = u_\nu(\Omega)dV d\Omega d\nu$ dove dV è un elemento infinitesimo di volume. Considerate un cilindro su un raggio di lunghezza ct , vedi figura 2.3; poichè il volume del cilindro vale $dAcdt$

$$dE = u_\nu(\Omega)dAcdtd\Omega d\nu \quad . \quad (2.12)$$

La radiazione viaggia a velocità c , cosicchè nel tempo dt tutta la radiazione nel cilindro sarà passata in esso:

$$dE = I_\nu dA d\Omega dt d\nu \quad . \quad (2.13)$$

Eguagliando le due espressioni precedenti otteniamo

$$u_\nu(\Omega) = \frac{I_\nu}{c} \quad . \quad (2.14)$$

Integrando su tutto l'angolo solido otteniamo

$$u_\nu = \int u_\nu(\Omega)d\Omega = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega \quad , \quad (2.15)$$

oppure

$$\frac{4\pi}{c} J_\nu \quad , \quad (2.16)$$

dove abbiamo definito l' *intensità media* J_ν

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega \quad . \quad (2.17)$$

La densità totale di radiazione (erg cm^{-3}) è ottenuta semplicemente integrando u_ν su tutte le frequenze

$$u = \int u_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} \int J_\nu d\nu \quad (2.18)$$

2.2.3 Pressione di radiazione in un campo isotropo

Considerate un ambiente riflettente contenente un campo di radiazione isotropo. Ogni fotone trasferisce due volte la componente normale del momento ad ogni riflessione. Cosicchè abbiamo la relazione

$$p = \frac{2}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega \quad . \quad (2.19)$$

Questo è in accordo con la formula 2.11 poichè quì integriamo solamente su 2π steradiani. Adesso , per isotropia

$$p = \frac{2}{c} \int J_\nu d\nu \int \cos^2 \theta d\Omega \quad . \quad (2.20)$$

L' integrazione angolare dà :

$$p = \frac{1}{3} u \quad . \quad (2.21)$$

La pressione di radiazione di un campo di radiazione isotropa vale un terzo della densità di energia. Questo risultato sarà utile nella discussione della termodinamica del corpo nero.

2.2.4 Costanza Intensità

Considerate ogni raggio L e due punti lungo il raggio. Costruite le aree dA_1 e dA_2 normali al raggio in questi punti. Adesso facciamo uso del fatto che l' energia si conserva. Considerate l' energia portata dall' insieme di raggi passanti attraverso sia dA_1 che dA_2 (vedete figura 2.4). Questo può essere espresso in due modi

$$dE1 = I_{\nu_1} dA_1 dt_1 d\Omega_1 d\nu_1 = dE2 = I_{\nu_2} dA_2 dt_2 d\Omega_2 d\nu_2 \quad . \quad (2.22)$$

Quì $d\Omega_1$ è l' angolo solido sotteso da dA_2 a dA_1 e così via. Poichè $d\Omega_1 = dA_2/R^2$, $d\Omega_2 = dA_1/R^2$ e $d\nu_1 = d\nu_2$ abbiamo

$$I_{\nu_1} = I_{\nu_2} \quad . \quad (2.23)$$

Cosicchè l' intensità è costante lungo un raggio:

$$I_\nu = \text{costante} \quad . \quad (2.24)$$

Un altro modo di affermare il risultato precedente è attraverso la relazione differenziale

$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0 \quad , \quad (2.25)$$

dove ds è l' elemento differenziale di lunghezza lungo il raggio.

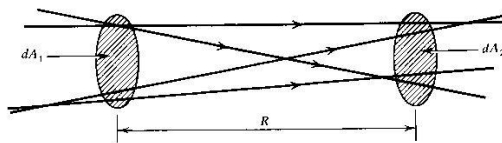


Figure 1.5 Constancy of intensity along rays.

Figura 2.4: Costanza dell' intensità lungo i raggi

Elements of Radiative Transfer

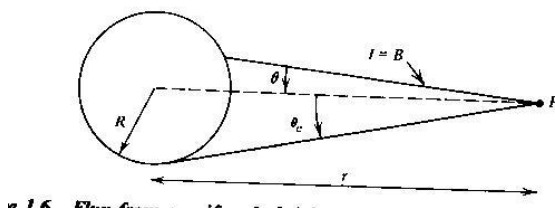


Figura 2.5: Flusso da una sfera uniformemente radiante

2.2.5 Sfera uniforme

Per dimostrare che non c'è conflitto fra la costanza dell' intensità specifica e la legge dell'inverso del quadrato , calcoliamo il flusso ad una distanza arbitraria da una sfera di brillantezza uniforme B (vale a dire che tutti i raggi lascianti la sfera hanno la stessa intensità . Questa sfera è chiaramente una sorgente isotropa. Nel punto P , l'intensità specifica è B se il raggio intercetta la sfera a zero altrimenti (vedi figura 2.5). Allora

$$F = \int I \cos(\theta) d\Omega = B \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_c} \sin \theta \cos \theta d\theta \quad , \quad (2.26)$$

dove $\theta_c = \sin^{-1}(R/r)$ è l' angolo tale che un raggio da P è tangente alla sfera. Ne segue che

$$F = \pi B (1 - \cos^2 \theta_c) = \pi B \sin^2 \theta_c \quad , \quad (2.27)$$

oppure

$$F = \pi B \left(\frac{R}{r} \right)^2 \quad . \quad (2.28)$$

Cosicchè l'intensità specifica del raggio è costante , ma l'angolo solido sotteso da un dato oggetto decresce in maniera tale che la legge dell' inverso del quadrato è soddisfatta. Un risultato utile si inserendo $r=R$:

$$F = \pi B \quad . \quad (2.29)$$

Cosicchè il flusso su una superficie di brillantezza uniforme B è semplicemente πB .

2.3 Trasferimento della radiazione

Se un raggio passa attraverso la materia , l' energia può essere addizionata o sottratta da esso dall' emissione o dall' assorbimento , e l' intensità specifica non rimarrà costante. La diffusione di fotoni nel oppure fuori del pennello possono anche modificare l' intensità.

2.3.1 Emissione

Il coefficiente di emissione spontanea j è definito come l' energia emessa per unità di tempo per unità di angolo solido e per unità di volume :

$$dE = j dV d\Omega dt \quad . \quad (2.30)$$

Un coefficiente di emissione monocromatica può essere definito in modo analogo

$$dE = j_\nu dV d\Omega dt d\nu \quad . \quad (2.31)$$

dove j_ν è espresso in $erg\ cm^{-3}s^{-1}ster^{-1}hz^{-1}$. In generale il coefficiente di emissione dipende dalla direzione nella quale l'emissione avviene . Per un emettitore isotropo o per una distribuzione di emittori orientati random possiamo scrivere

$$j_\nu = \frac{1}{4\pi} P_\nu \quad , \quad (2.32)$$

dove p_ν è la potenza irradiata per unità di volume per unità di frequenza. Qualche volta l'emissione spontanea è definita dalla emissività ϵ_ν , definita come l' energia emessa spontaneamente per unità di frequenza per unità di tempo per unità di massa , con unità di $erg\ gm^{-1}s^{-1}hz^{-1}$. Se l'emissione è isotropa allora

$$dE = \epsilon_\nu \rho dV dt d\nu \frac{d\Omega}{4\pi} \quad , \quad (2.33)$$

Figura 2.6: Raggi passanti attraverso un mezzo di assorbitori

dove ρ è la densità di massa del mezzo che emette e l'ultimo fattore tiene conto della frazione di energia irradiata in $d\Omega$. Comparando le due espressioni per dE , abbiamo una relazione fra ϵ_ν e j_ν :

$$j_\nu = \frac{\epsilon_\nu \rho}{4\pi} \quad , \quad (2.34)$$

che vale per un'emissione isotropa. Andando ad una distanza ds , un pennello di sezione dA passa attraverso un volume $dV = dA ds$. Cosicché l'intensità addizionata al pennello dalla emissione spontanea vale

$$dI_\nu = j_\nu ds \quad . \quad (2.35)$$

2.3.2 Assorbimento

Definiamo il coefficiente di assorbimento α_ν , dalla seguente equazione, che rappresenta le perdite di intensità in un pennello mentre attraversa una distanza ds (per convezione α_ν è positivo per energia sottratta al pennello):

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds \quad . \quad (2.36)$$

Questa legge fenomenologica può essere compresa in termini di modelli microscopici in cui le particelle con densità n (numero per unità di volume) ognuno presenta un'area effettivamente assorbente, o *sezione d'urto*, di magnitudine $\sigma_\nu (cm^2)$. Questi assorbitori sono distribuiti in maniera random. Consideriamo adesso l'effetto di questi assorbitori di radiazione attraverso un'area dA ed un angolo solido $d\Omega$ (vedi Fig.2.6). Il numero di assorbitori nell'elemento eguaglia $n dA ds$. L'area totale assorbente presentata dagli assorbitori eguaglia $n \sigma_\nu dA ds$. L'energia assorbita dal pennello vale

$$dI_\nu dA dt d\Omega d\nu = I_\nu (n \sigma_\nu dA ds) dt d\Omega d\nu \quad , \quad (2.37)$$

cosicché

$$dI_\nu = -n \sigma_\nu I_\nu ds \quad , \quad (2.38)$$

che è precisamente la già citata legge fenomenologica 2.36, dove

$$\alpha_\nu = n \sigma_\nu \quad , \quad (2.39)$$

Spesso α_ν è scritta come

$$\alpha_\nu = -\rho k_\nu \quad , \quad (2.40)$$

dove ρ è la densità di massa e $k_\nu (cm^2 g^{-1})$ è chiamato coefficiente di assorbimento di massa; k_ν è chiamato qualche volta coefficiente di opacità. Ci sono alcune condizioni di validità per questa teoria microscopica : le più importanti sono che

- La scala lineare della sezione d' urto deve essere piccola se paragonata alla distanza media fra le particelle d ; cosicchè $\alpha_\nu^{1/2} \ll d \approx n^{-1/3}$, dalla quale segue $\alpha_\nu d \ll 1$
- Gli assorbitori sono indipendenti ed orientati in maniera random

Fortunatamente queste condizioni sono quasi sempre soddisfatte in astrofisica. Più avanti nel paragrafo considereremo che l' assorbimento include sia il vero assorbimento sia l' emissione stimolata , perchè ambedue sono proporzionali all' intensità del pennello che arriva (diversamente dall' emissione spontanea). Anche se questa condizione può sembrare artificiale , sarà trovata conveniente e permetterà di fare a meno di inserire la meccanica quantistica nella nostra formulazione classica.

Come dimostreremo più avanti , consideriamo sotto la voce assorbimento sia il vero assorbimento sia l' emissione stimolata , perchè sono ambedue proporzionali all' intensità del pennello che avanza (a differenza dell' emissione spontanea) . Cosicchè l' assorbimento netto può essere positivo o negativo , a seconda che domini la vera emissione oppure quella stimolata.

2.3.3 Equazione del trasferimento radiativo

Possiamo adesso incorporare gli effetti dell' emissione e dell' assorbimento in una equazione singola dando la variazione dell' intensità specifica lungo un raggio. Dall' espressione per l' emissione e l' assorbimento abbiamo

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu \quad . \quad (2.41)$$

L' equazione del trasferimento rappresenta un formalismo utile con il quale ricavare l' intensità in un mezzo che emette ed in uno che assorbe. Essa incorpora gli effetti macroscopici della radiazione in una sola equazione , collegandoli ai due coefficienti α_ν e j_ν . Una volta che α_ν

e j_ν sono conosciuti è relativamente semplice risolvere l'equazione del trasferimento per una intensità specifica. Quando è presente lo scattering, la soluzione dell'equazione del trasferimento radiativo è più difficile, questo perchè l'emissione in $d\Omega$ dipende da I_ν sull'angolo solido $d\Omega'$, integrato sopra l'ultimo (diffusione da $d\Omega'$ su $d\Omega$). L'equazione del trasferimento diventa poi una equazione integrodifferenziale, che in generale deve essere risolta tramite tecniche numeriche.

Diamo adesso la soluzione in due casi limite

2.3.4 Solo Emissione

Se $\alpha_\nu = 0$ l'equazione diventa

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu \quad , \quad (2.42)$$

che ha soluzione

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^s j_\nu(s') ds' \quad , \quad (2.43)$$

L'aumento dell'intensità è quindi uguale al coefficiente di emissione integrato lungo la linea di vista.

2.3.5 Solo Assorbimento

Se $j_\nu = 0$ l'equazione diventa

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu \quad , \quad (2.44)$$

che ha soluzione

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) e^{-\int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds'} \quad . \quad (2.45)$$

L'intensità diminuisce lungo il raggio seguendo un esponenziale del coefficiente di assorbimento integrato lungo la linea di vista.

2.3.6 Profondità ottica e funzione sorgente

L'equazione del trasferimento assume una forma semplice se, invece di s , usiamo un'altra variabile τ_p chiamata profondità ottica e definita da:

$$d\tau_p = \alpha_\nu ds \quad , \quad (2.46)$$

oppure

$$\tau_p(s) = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' \quad . \quad (2.47)$$

La profondità ottica testè definita è misurata lungo un cammino del raggio che avanza; occasionalmente τ_p è misurato nel senso inverso al cammino del raggio ed un segno meno compare nella formula 2.47. In un mezzo a piani paralleli, una lunghezza ottica standard è qualche volta usata per misurare distanze normali alla superficie, cosicchè ds è rimpiazzata da dz e $\tau_p = \tau_p(z)$. Quando sarà il caso distingueremo fra queste due. Il punto s_0 è arbitrario e setta il punto 0 per la profondità ottica. Si dice che un mezzo è *otticamente spesso* oppure *opaco* quando τ_p integrato lungo un tipico cammino attraverso il mezzo, soddisfa $\tau_p > 1$. Quando $\tau_p < 1$ il mezzo è detto essere *otticamente sottile* oppure *trasparente*. Essenzialmente un mezzo otticamente sottile è quello in cui un tipico fotone di frequenza ν può attraversare il mezzo senza essere assorbito, al contrario un mezzo otticamente spesso è quello in cui un fotone medio di frequenza ν non riesce ad attraversare il mezzo senza essere assorbito.

L'equazione del trasferimento può adesso essere scritta dividendo per α_ν

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad , \quad (2.48)$$

dove la *funzione sorgente* S_ν è definita come il rapporto del coefficiente di emissione sul coefficiente di assorbimento:

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \quad . \quad (2.49)$$

La funzione sorgente S_ν è spesso una quantità fisica più semplice del coefficiente di emissione. In più il cammino ottico rivela più chiaramente gli intervalli lungo un raggio per quel che concerne la radiazione. Per queste ragioni si usano normalmente τ_ν e S_ν invece di j_ν e α_ν . Adesso possiamo risolvere formalmente l'equazione del transfer radiativo, considerando tutte le quantità come funzione del cammino ottico τ_ν , invece di s . Moltiplicando l'equazione per il fattore integrante e^{τ_ν} e definendo le quantità $\mathcal{F} \equiv I_\nu e^{\tau_\nu}$, $\mathcal{S} \equiv S_\nu e^{\tau_\nu}$ otteniamo

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\tau_\nu} = \mathcal{S} \quad , \quad (2.50)$$

con la soluzione

$$\mathcal{F}(\tau_\nu) = \mathcal{F}(0) + \int_0^{\tau_\nu} \mathcal{S}(\tau_\nu \iota) d\tau_\nu \iota \quad . \quad (2.51)$$

Riscrivendo la soluzione in termini di I_ν e S_ν abbiamo la soluzione formale dell'equazione del trasferimento:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau_\nu \iota)} S(\tau_\nu \iota) d\tau_\nu \iota \quad . \quad (2.52)$$

Poichè τ_ν è il fattore adimensionale dopo il quale assorbimento diminuisce di un fattore e , l'equazione 2.51 è interpretata come la somma di due termini: l'intensità iniziale diminuita dall'assorbimento più la funzione sorgente diminuita dall'assorbimento. Come esempio consideriamo una funzione \mathcal{S}_ν costante. Allora l'equazione 2.51 ha soluzione

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}) \\ &= S_\nu + e^{-\tau_\nu}(I_\nu(0) - S_\nu) \quad . \end{aligned} \quad (2.53)$$

Quando $t \rightarrow \infty$, l'equazione 2.53 dimostra che $I_\nu \rightarrow S_\nu$. Ricordiamo al lettore che quando lo scattering è presente, S_ν contiene un contributo da I_ν , cosicchè non è possibile specificare S_ν a priori. Concludiamo questa sezione con un risultato da usare più tardi, che provvede una spiegazione semplice della funzione sorgente e della equazione del trasferimento radiativo. Dall'equazione del trasferimento vediamo che se $I_\nu > S_\nu$ allora $\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} < 0$ ed I_ν tende a decrescere lungo il raggio. Se invece $I_\nu < S_\nu$, allora I_ν tende a crescere lungo il raggio. Cosicchè la funzione sorgente è la quantità che l'intensità specifica cerca di raggiungere, e che raggiunge se il cammino ottico è sufficiente. Da questo punto di vista l'equazione del trasferimento radiativo descrive un processo di rilassamento.

2.3.7 Libero cammino medio

Un concetto utile, che descrive l'assorbimento in un modo equivalente, è quello del *libero cammino medio* della radiazione. Questo è definito come la distanza media che un fotone può percorrere attraverso un mezzo assorbente senza essere assorbito. Esso può essere facilmente collegato con il coefficiente di assorbimento di un materiale omogeneo.

Dalla equazione esponenziale (??) , la probabilità che un fotone viaggi almeno una profondità ottica τ_ν è semplicemente $e^{-\tau_\nu}$. La profondità ottica media attraversata è così uguale all' unità :

$$\langle \tau_\nu \rangle \equiv \int_0^\infty e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = 1 \quad . \quad (2.54)$$

La distanza media fisica percorsa in un mezzo omogeneo è definita come libero cammino medio l_ν ed è determinata da $\langle \tau_\nu \rangle = \alpha_\nu l_\nu = 1$ oppure

$$l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{n\sigma_\nu} = 1 \quad . \quad (2.55)$$

Cosicchè il libero cammino medio l_ν è semplicemente il reciproco del coefficiente di assorbimento per un materiale omogeneo. Possiamo definire un *cammino libero medio locale* ad ogni punto di un mezzo inomogeneo come il cammino libero medio che risulterebbe se il fotone attraversasse una regione omogenea larga con le stesse proprietà . Cosicchè in ogni punto abbiamo $l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}$.

2.3.8 La forza della radiazione

Se un mezzo assorbe radiazione, allora la radiazione esercita una forza sul mezzo, perchè la radiazione porta il momento. Possiamo dapprima definire un vettore del *flusso della radiazione*

$$\mathbf{F}_\nu = \int I_\nu \mathbf{n} d\Omega \quad , \quad (2.56)$$

dove \mathbf{n} è il vettore unità lungo la direzione del raggio . Ricordiamo che il fotone ha momento $\frac{E}{c}$, cosicchè il vettore momento per unità di area per unità di tempo per unità di lunghezza assorbita dal mezzo è

$$\mathcal{F} = \frac{1}{c} \int \alpha_\nu \mathbf{F}_\nu d\nu \quad . \quad (2.57)$$

Poichè $dAds = dV$, \mathcal{F} è la forza per unità di volume impartita sul mezzo dal campo di radiazione. Notiamo che la forza per unità di massa di materiale è data da $\mathbf{f} = \mathcal{F}/\rho$ oppure

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} \int k_\nu \mathbf{F}_\nu d\nu \quad . \quad (2.58)$$

Le due equazioni (2.58 e 2.57) assumono che il coefficiente di assorbimento sia isotropo; esse assumono pure che non sia impartito momento dalla emissione di radiazione , come d' altronde è vero per emissione isotropa.

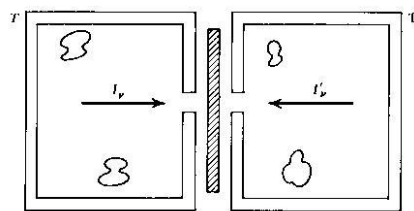
16 *Fundamentals of Radiative Transfer*Figure 1.8 Two containers at temperature T , separated by a filter.

Figura 2.7: Due contenitore a temperatura T , separati da un filtro

2.4 La radiazione termica

La radiazione termica è emessa dalla materia in equilibrio termico.

2.4.1 Radiazione di corpo nero

Per investigare la radiazione termica, è necessario prima di tutto considerare la *radiazione di corpo nero*, radiazione che è essa stessa in equilibrio termico. Per ottenere quella radiazione prendiamo una cavità a temperatura T e non lasciamo entrare od uscire la radiazione. Se stiamo attenti, possiamo aprire un piccolo buco in un lato del contenitore e ivi misurare la radiazione senza disturbare l'equilibrio. Adesso, usando qualche argomento generale di termodinamica più il fatto che i fotoni non hanno massa, possiamo dedurre importanti proprietà della radiazione di corpo nero. Poichè i fotoni non hanno massa, possono essere creati e distrutti in numero arbitrario sulle pareti del contenitore (per motivi pratici c'è una auto-interazione trascurabile fra fotoni). Cosicchè non c'è legge di conservazione per il numero di fotoni (a differenza del numero di particelle per i barioni), e ci aspettiamo che il numero di fotoni si aggiustino fra di loro in equilibrio alla temperatura T . Una importante proprietà di I_ν è che è indipendente dalla proprietà della cavità e dipende solo dalla temperatura. Per provare ciò aggiungiamo un altro contenitore di forma arbitraria e mettiamo un filtro fra i due, che passa solo una singola frequenza ν ma non le altre, vedi figura 2.7.

Se $I_\nu \neq I'_\nu$, l'energia fluirà spontaneamente fra le due cavità. Poichè queste due sono alla stessa temperatura, questo violerà la seconda legge

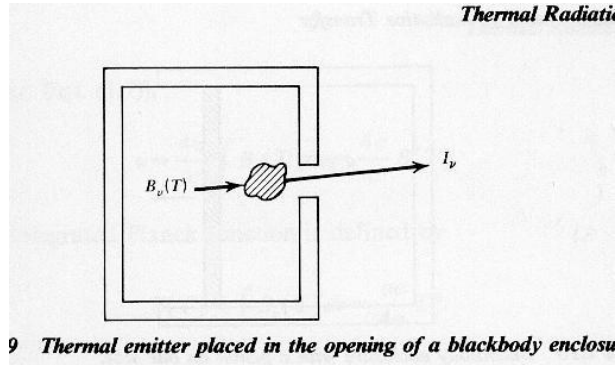


Figura 2.8: Emittitore termico posto in un buco della cavità di corpo nero

della termodinamica. Quindi avremo la relazione:

$$I_\nu = \text{funzione universale di } T \text{ e } \nu \equiv B_\nu(T) \quad . \quad (2.59)$$

I_ν deve essere indipendente dalla forma del contenitore. Un corollario dice che è pure isotropa; $I_\nu \neq I_\nu(\Omega)$. La funzione $B_\nu(T)$ è chiamata funzione di Planck.

2.4.2 Legge di Kirchhoff per l'emissione termica

Adesso consideriamo un elemento di qualche materiale che emette termicamente a temperatura T , cosicchè l'emissione dipende solamente dalla sua temperatura e dalle proprietà interne. Mettiamo questo oggetto in un buco della cavità, vedi figura 2.8. Assumiamo che la funzione sorgente del materiale sia S_ν . Se $S_\nu > B_\nu$, allora $I_\nu > B_\nu$ e se invece $S_\nu < B_\nu$, allora $I_\nu < B_\nu$, vedi discussione dopo l'equazione 2.53. Ma la presenza del materiale non può alterare la radiazione, poichè la nuova configurazione è pure essa una cavità di corpo nero a temperatura T . Cosicchè abbiamo le relazioni:

$$S_\nu = B_\nu(T) \quad , \quad (2.60)$$

$$j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T) \quad . \quad (2.61)$$

La relazione (2.61), chiamata legge di Kirchhoff è un'espressione fra α_ν e j_ν e la temperatura della materia T . L'equazione del trasferimento è

allora (vedi equazione 2.41)

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + \alpha_\nu B_\nu(T) \quad , \quad (2.62)$$

oppure

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T) \quad . \quad (2.63)$$

Poichè $S_\nu = B_\nu$ nella cavità di corpo nero, abbiamo che $I_\nu = B_\nu$ dappertutto. La radiazione di corpo nero è omogenea ed isotropa, cosicchè $p = \frac{1}{3}u$. A questo punto bisogna delineare bene la differenza fra *radiazione di corpo nero* , dove $I_\nu = B_\nu$ e *radiazione termica* dove $S_\nu = B_\nu$. La radiazione termica diventa di corpo nero solamente per mezzi otticamente spessi.

2.5 Lo spettro di Planck

Adesso riportiamo una derivazione della funzione di Planck . Questa derivazione si può dividere in due parti:

- Prima deriviamo la densità degli stati dei fotoni in una cavità di corpo nero
- Viene valutata l' energia media per stato dei fotoni.

Considerate un fotone di frequenza ν che si propaga in direzione \mathbf{n} dentro una scatola. Il vettore d' onda del fotone è $\mathbf{k} = (\frac{2\pi}{\lambda})\mathbf{n} = (\frac{2\pi\nu}{c})\mathbf{n}$. Se ogni dimensione della scatola L_x , L_y e L_z è molto maggiore che una lunghezza d' onda, allora il fotone può essere rappresentato da una specie di onda stazionaria. Il numero dei nodi in ogni direzione x,y,z e , per esempio , $n_x = k_x L_x / 2\pi$, poichè c'è un nodo per ogni numero integrale di lunghezze d' onda in una data direzione ortogonale. Adesso, si può dire che l' onda ha cambiato stato in maniera distinguibile quando il numero d' onda in una data direzione cambia di uno o più. Se $n_i \gg 1$, possiamo scrivere che il numero di nodi cambia in intervallo di numeri d' onda come , per esempio

$$\Delta n_x = \frac{L_x \Delta k_x}{2\pi} \quad . \quad (2.64)$$

Quindi il numero di stati nel vettore d'onda tri-dimensionale $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \equiv d^3 k$ è

$$\Delta N = \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \frac{L_x L_y L_z d^3 k}{(2\pi)^3} \quad . \quad (2.65)$$

Se usiamo il fatto che $L_x L_y L_z = V$ (il volume del contenitore) e usando il fatto che i fotoni hanno due polarizzazioni indipendenti (due stati per vettore d'onda \mathbf{k}), possiamo vedere che il numero di stati per unità di volume per unità di vettore d'onda tridimensionale vale $\frac{2}{(2\pi)^3}$. Adesso dato che

$$d^3 k = k^2 dk d\Omega = \frac{(2\pi)^3 \nu^2 d\nu d\Omega}{c^3} \quad , \quad (2.66)$$

troviamo che la densità di stati (il numero di stati per angolo solido per volume per frequenza) è :

$$\rho_s = \frac{2\nu^2}{c^3} \quad . \quad (2.67)$$

Adesso ci chiediamo quanto vale l'energia media per ogni stato. Sappiamo dalla teoria quantistica che ogni fotone di frequenza ν ha energia $h\nu$, cosicchè ci focalizziamo su una singola frequenza ν e ci chiediamo quale sia l'energia media dello stato che ha frequenza ν . Ogni stato può contenere n fotoni di energia $h\nu$, dove $n=0,1,2,\dots$. Cosicchè l'energia può essere $E_n = nh\nu$. In accordo con la meccanica statistica, la probabilità di avere uno stato di energia E_n è proporzionale a $e^{-\beta E_n}$, dove $\beta = (KT)^{-1}$ e K =costante di Boltzmann $= 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg deg}^{-1}$. Allora, l'energia media vale:

$$\overline{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-\beta E_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \right) \quad . \quad (2.68)$$

Dalla formula della somma della serie geometrica ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu\beta} = (1 - e^{-h\nu\beta})^{-1} \quad . \quad (2.69)$$

Cosicchè abbiamo il risultato:

$$\overline{E} = \frac{h\nu e^{-\beta h\nu}}{1 - e^{-\beta h\nu}} = \frac{h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{KT}) - 1} \quad . \quad (2.70)$$

Poichè $h\nu$ è l' energia di un fotone di frequenza ν , l' equazione 2.70 dice che il numero medio di fotoni di frequenza ν , n_ν , detto numero di occupazione vale

$$n_\nu = \left[\exp\left(\frac{h\nu}{KT}\right) - 1 \right]^{-1} . \quad (2.71)$$

L' equazione 2.70 è l' espressione standard per la statistica Bose-Einstein con un numero illimitato di particelle (potenziale chimico=0). L' energia per angolo solido per volume per frequenza è il prodotto di \bar{E} e la densità di stati , equazione 2.67. Inoltre questa può essere scritta in termini di $u_\nu(\Omega)$ introdotta nel paragrafo 2.2.2. Cosicchè abbiamo

$$u_\nu(\Omega)dV d\nu d\Omega = \left(\frac{2\nu^2}{c^3} \right) \frac{h\nu}{\exp(\frac{h\nu}{KT}) - 1} dV d\nu d\Omega , \quad (2.72)$$

ovverosia

$$u_\nu = \left(\frac{2h\nu^3}{c^3} \right) \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{KT}) - 1} . \quad (2.73)$$

L' equazione 2.15 dà la relazione fra $u_\nu(\Omega)$ e I_ν ; quì abbiamo $I_\nu = B_\nu$ cosicchè

$$B_\nu(T) = \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} \right) \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{KT}) - 1} . \quad (2.74)$$

L' equazione 2.74 esprime la *legge di Planck*. Se esprimiamo la legge di Planck per unità di lunghezza anzichè per unità di frequenza abbiamo

$$B_\lambda(T) = \left(\frac{2hc^2}{\lambda^5} \right) \frac{1}{\exp(\frac{hc}{\lambda KT}) - 1} . \quad (2.75)$$

Un grafico che riporta B_ν e B_λ in funzione di ν e λ per un intervallo di valori di T ($1 \text{ K} \leq T \leq 10^8 \text{ K}$) e riportato nella figura 2.9

2.5.1 Proprietà della legge di Planck

La forma di $B_\nu(T)$ appena derivata nella 2.74 è uno dei risultati più importanti nei processi di radiazione. Diamo adesso un numero di proprietà e conseguenze di questa legge:

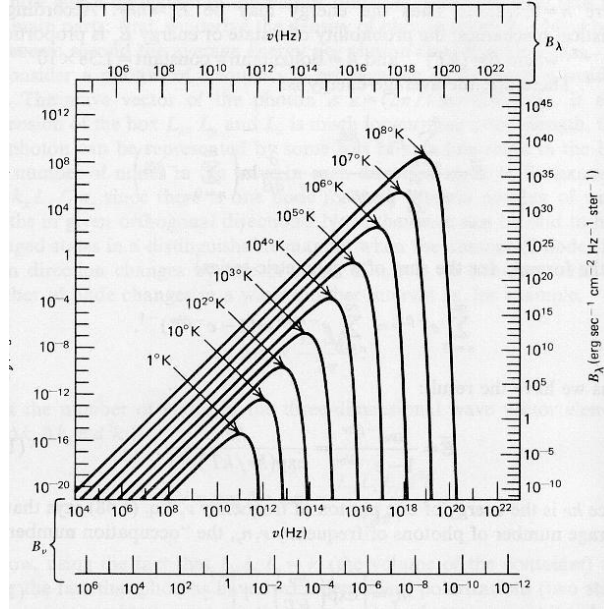


Figura 2.9: Spettro della radiazione di corpo nero a varie temperature

2.5.2 La legge di Rayleigh-Jeans

Nel caso in cui $h\nu \ll KT$ si può espandere l'esponenziale in serie di Taylor

$$\exp\left(\frac{h\nu}{KT}\right) - 1 = \frac{h\nu}{KT} + \dots, \quad (2.76)$$

deduciamo quindi inserendo lo sviluppo in serie nella 2.74 la legge di Rayleigh-Jeans:

$$I_{\nu}^{RJ}(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} KT. \quad (2.77)$$

Notate che questo risultato non contiene la costante di Planck. Essa fu originariamente dedotta assumendo che $\bar{E}=KT$, il classico valore di equipartizione per l'energia di un'onda elettromagnetica. La legge di Rayleigh-Jeans si applica alle frequenze basse (nella regione radio si applica quasi sempre). Essa si comporta come una retta nelle variabili $\log B_{\nu}$ - $\log \nu$ in figura 2.9. Notate che la legge 2.77 si applica a tutte le frequenze, l'energia totale $\propto \int \nu^2 d\nu$ diverge. Quest'effetto è conosciuto come catastrofe ultravioletta. Per $h\nu \gg KT$, si deve considerare la natura discreta quantistica dei fotoni.

2.5.3 La legge di Wien

Nel caso in cui $h\nu \ll KT$ si può trascurare l'uno al denominatore della 2.74 quando paragonato ad $\exp(\frac{h\nu}{KT})$, ottenendo la *legge di Wien*.

$$I_\nu^W(T) = \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} \right) \exp\left(-\frac{h\nu}{KT}\right) . \quad (2.78)$$

Questa forma fù proposta da Wien sulla base di argomenti ad hoc. La brillantezza della radiazione di corpo nero decresce rapidamente con la frequenza una volta che il massimo è raggiunto. Notate la porzione ripida delle curve in in figura 2.9 in corrispondenza della legge di Wien.

2.5.4 Monotonicità con la temperatura

Se abbiamo due curve di corpo nero, quella con temperatura maggiore ricopre interamente l'altra. Per provare ciò notiamo che la derivata prima :

$$\frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} = \left(\frac{2h^2\nu^4}{c^2kT^2} \right) \frac{\exp(\frac{h\nu}{KT})}{\left[\exp(\frac{h\nu}{KT}) - 1 \right]^2} , \quad (2.79)$$

è positiva. Ad ogni frequenza l'effetto di aumentare la temperatura è aumentare $B_\nu(T)$. Notiamo pure che $B_\nu \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow 0$ e $B_\nu \rightarrow \infty$ quando $T \rightarrow \infty$.

2.5.5 La legge dello spostamento di Wien

La frequenza ν_{max} alla quale si ha il massimo di $B_\nu(T)$ si può trovare risolvendo:

$$\frac{\partial B_\nu(T)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=\nu_{max}} = 0 . \quad (2.80)$$

Mettendo $x \equiv h\nu_{max}/kT$, troviamo il minimo risolvendo $x=3(1-e^{-x})$, che la radice approssimata $x=2.82$, cosicchè

$$h\nu_{max} = 2.82kT , \quad (2.81)$$

oppure

$$\frac{\nu_{max}}{T} = 5.88 \cdot 10^{10} \text{ Hz gradi}^{-1} . \quad (2.82)$$

Cosicchè la frequenza di picco della radiazione di corpo nero si sposta linearmente con la temperatura; questa è conosciuta come *Legge dello*

spostamento di Wien . In via analoga , la lunghezza d' onda λ_{max} al quale occorre il massimo di $B_\lambda(T)$ si può trovare risolvendo:

$$\frac{\partial B_\lambda(T)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_{max}} = 0 \quad . \quad (2.83)$$

Mettendo $y \equiv hc/(\lambda_{max}kT)$, troviamo il minimo risolvendo $y=5(1-e^{-y})$, che ha la radice approssimata $x=4.97$, cosicchè

$$\lambda_{max} T = 0.290 \text{ cm gradi} \quad . \quad (2.84)$$

Pure questa è conosciuta come *Legge dello spostamento di Wien* ; le due equazioni (2.81) e (2.84) sono ragionevoli.

Tramite ragionamenti di tipo dimensionale uno avrebbe potuto arguire che lo spettro di corpo nero dovrebbe essere massimo alla energia $\approx kT$, poichè kT è la sola quantità con le dimensione dell' energia che può essere formata con k, T, h e c . Bisogna notare che i picchi di B_ν e B_λ non occorrono allo stesso posto in lunghezza d' onda o frequenza; ovverosia , $\lambda_{max}\nu_{max} \neq c$.

Come esempio , se $T=7300$ K il picco di B_ν è a $\lambda=0.7$ microns (rosso) , mentre il picco di B_λ è $\lambda=0.4$ microns (blu) . La legge dello spostamento di Wien dà una maniera conveniente per caratterizzare l' intervallo di frequenza per il quale la legge di Rayleigh-Jeans è valida , ovverosia $\nu \ll \nu_{max}$; in maniera simile per la legge di Wien $\nu \gg \nu_{max}$.

2.5.6 La relazione fra le costanti fondamentali

Mettendo la forma esplicita per la brillantezza otteniamo

$$\int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \left(\frac{2h}{c^2}\right) \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad . \quad (2.85)$$

Questo integrale può essere trovato sulle tavole degli integrali ed ha valore $\pi^4/15$. Quindi abbiamo il risultato:

$$\int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \left(\frac{2\pi^4 k^4}{15c^2 h^3}\right) T^4 \quad , \quad (2.86)$$

e quindi

$$\sigma = \left(\frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}\right) \quad a = \left(\frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3}\right) \quad . \quad (2.87)$$

2.6 Temperature caratteristiche

Abbiamo tre diverse definizioni di temperatura

2.6.1 Temperatura di brillantezza

Una via per caratterizzare la brillantezza (intensità specifica) ad una certa frequenza è dare la temperatura del corpo nero avente la stessa brillantezza a quella frequenza. Ovverosia per ogni valore I_ν definiamo un $T_b(\nu)$ dalla relazione

$$I_\nu = B_\nu(T_b) \quad , \quad (2.88)$$

questa è chiamata temperatura di brillantezza. Questa via per specificare la brillantezza ha il vantaggio di essere strettamente connessa con le proprietà fisiche dell'emittitore, ed ha unità semplici (K) invece di (*erg cm⁻² s⁻¹ Hz⁻¹ ster⁻¹*). Questa procedura è usata specialmente in radio-astronomia, dove la legge di Rayleigh-Jeans è usata abitualmente, cosicché

$$I_\nu = \frac{2\nu^2}{c^2} K T_b \quad , \quad (2.89)$$

oppure

$$T_b = \frac{c^2}{2\nu^2 k} I_\nu \quad , \quad (2.90)$$

per $h\nu \ll kT$. L'equazione del trasferimento per l'emissione termica prende una forma particolarmente semplice nel limite di Rayleigh-Jeans (vedi 2.63)

$$\frac{dT_b}{d\tau_\nu} = -T_b + T \quad , \quad (2.91)$$

dove T è la temperatura del materiale. Quando T è costante abbiamo

$$T_b = T_b(0)e^{-\tau_\nu} + T(1 - e^{-\tau_\nu}), \quad k\nu \ll kT \quad . \quad (2.92)$$

Se la profondità ottica è larga, la temperatura di brillantezza della radiazione si avvicina alla temperatura del materiale. Notiamo che la unicità della definizione di temperatura di brillantezza si basa sulla proprietà monotonica della legge di Planck. . Notiamo anche che, in generale, la temperatura di brillantezza è funzione di ν . Solamente se la sorgente è un corpo nero la temperatura di brillantezza è uguale a tutte le frequenze. Nella regione di Wien della legge di Planck il concetto di temperatura di brillantezza non è utile perchè B_ν decresce rapidamente con ν , sia perchè non è possibile formulare una equazione di trasferimento lineare nella temperatura di brillantezza.

2.6.2 Temperatura di colore

Spesso dalle misure uno spettro risulta essere di forma all' incirca di corpo nero, ma non necessariamente del valore assoluto appropriato. Per esempio misurando F_ν da una sorgente non risolta non possiamo trovare I_ν a meno che non conosciamo la distanza della sorgente e le sue condizioni fisiche. Fittando i dati con una curva di corpo nero senza fare attenzione alla scala verticale otteniamo una *temperatura di colore* T_c . Spesso la procedura per il fit è nient' altro che la stima del picco dello spettro e conseguente applicazione della legge dello spostamento di Wien per trovare la temperatura. La temperatura di colore T_c darà pure la temperatura di una sorgente con spettro di corpo nero di scala assoluta sconosciuta. Pure, T_c darà la temperatura di un emettitore termico che sia otticamente sottile, una volta che la profondità ottica sia circa costante per le frequenze vicino al picco. In questo caso la temperatura di brillantezza sarà minore della temperatura dell' emettitore, dato che lo spettro di corpo nero raggiunge la massima intensità ottenibile di un emettitore termico a temperatura T per motivi termodinamici generali.

2.6.3 Temperatura effettiva

La temperatura effettiva di una sorgente T_{eff} è derivata dall' ammontato totale del flusso, integrato su tutte le frequenze emesse da quella sorgente. Otteniamo T_{eff} eguagliando il flusso attuale F al flusso di corpo nero alla temperatura T_{eff} :

$$F = \int \cos\theta I_\nu d\nu d\Omega \equiv \sigma T_{eff}^4 \quad . \quad (2.93)$$

Notate che sia T_{eff} che T_b dipendono dalla magnitudine dell' intensità della sorgente, mentre T_c dipende solamente dalla forma dello spettro osservato.

Capitolo 3

Astronomia Stellare

In questo capitolo trattiamo il problema della radiazione stellare, il sistema delle magnitudini, la temperatura effettiva e quella di colore, la magnitudine assoluta e quella bolometrica, la luminosità e i raggi stellari, il sistema B-V e quello U-B, il diagramma di Hertzsprung-Russel relativo alle stelle più vicine ed ai clusters ed infine la relazione massa-luminosità. Molti dati sono stati presi dalla rete oppure dalle tabelle di calibrazione (vedi appendice B) ed uno speciale software è stato sviluppato per analizzare i dati.

3.1 La Radiazione Stellare

Analizzando la radiazione stellare , si è visto che ogni stella irradia come un corpo nero: se T_e è la temperatura superficiale di una stella, lo spettro di tale una stella è perfettamente sovrapponibile a quello di una cavità radiante con temperatura T_e ; riportiamo in figura 3.1 i risultati di uno spettrometro [Biermann et al. 2002] che analizza la luce solare

Rimandiamo il lettore interessato all' articolo [Biermann et al. 2002] dove vengono discussi la lunghezza d' onda di picco dello spettro , 500 nm , ed il valore di temperatura che meglio fitta i dati , 5150 K.

In effetti l' energia termica irradiata da una stella è trascurabile rispetto a quella contenuta in essa e dunque può valere una ipotesi di superficie adiabatica che permette di associare una stella ad un corpo nero. Questo fatto è molto importante poichè possiamo applicare le legge sul corpo nero 2.74 dalla quale si può ottenere la temperatura superficiale di ogni stella conoscendo semplicemente la lunghezza d' on-

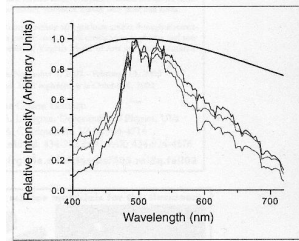


Figura 3.1: Spettro solare come intensità relativa verso lunghezza d'onda. La linea solida rappresenta lo spettro di un corpo nero a 5150 K

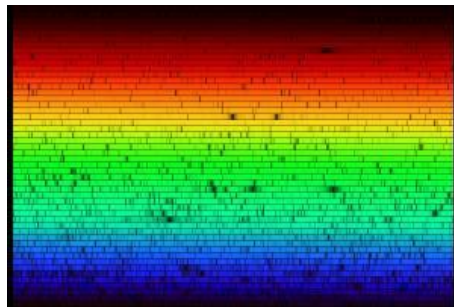


Figura 3.2: Spettro del sole da 4000 a 7000 Å.

da di massima emissione. Questa analisi può essere fatta scomponendo la luce stellare con un prisma e misurando l'intensità luminosa ad ogni intervallo $\Delta\lambda$ di lunghezza d'onda, oppure facendo attraversare alla luce filtri posti in successione e misurando ad ogni passaggio l'intensità luminosa rimasta. Riportiamo la figura 3.2 di uno spettro con le lunghezze d'onda che crescono da sinistra a destra lungo ogni stringa e dal basso all'alto. Ognuna delle 50 fette copre 60 Å, per un range del visuale da 4000Å a 7000 Å. Ricordiamo che il sole è una stella G2 e che non è chiaro perchè alcuni colori sono assenti dallo spettro summenzionato. Si noti che più le stelle sono calde, tanto più piccola sarà la lunghezza d'onda di massima emissione λ_{max} ; per questo motivo le stelle rosse sono più fredde di quelle blu. La luminosità L di una stella è definita come l'energia irradiata nell'unità di tempo. Sulla Terra si può misurare il flusso di radiazione $F(r)$ che è l'energia irradiata da una stella che giunge a distanza r , per unità di superficie e di tempo. Con-



Figura 3.3: Ipparco (190 a-c ; 120 a-c) , inventò la prima scala di luminosità delle stelle

siderando che il corpo celeste irradia isotropicamente e che non esiste perdita di energia nello spazio che lo separa dall' osservatore terrestre si ha perciò :

$$L = 4\pi r^2 F(r) \quad . \quad (3.1)$$

3.2 Sistemi di magnitudine

Già gli antichi chiamavano le stelle più luminose stelle di prima magnitudine , e le stelle meno luminose di sesta magnitudine. Nel 120 a.c. l'astronomo greco Ipparco , vedi Figura 3.3, compilò un catalogo di 850 stelle visibili ad occhio nudo e le classificò a seconda della loro magnitudine apparente in sei classi: la stella più brillante essendo di magnitudine 1, e la più debole di magnitudine 6. Il metodo rimase in uso fino all'inizio del XVII secolo , quando l'invenzione del telescopio fece scoprire un grande quantità di stelle fino ad allora invisibili , tutte da classificare. Ricordiamo che ai tempi di Ipparco la accuratezza posizionale era dell' ordine di mezzo grado mentre adesso tramite il satellite Ipparcos è dell' ordine di $3 \cdot 10^{-7}$ gradi oppure 1 milliarcsec (mas). In verità quella di Ipparco è oggi definita *magnitudine visiva apparente* ovvero misurata così come appare ad un occhio umano o ad un qualunque apparecchio che abbia la sua stessa sensibilità. Nella figura 3.4 è riportata la curva di sensibilità dell' occhio umano .

La magnitudine dovrà essere una funzione logaritmica del flusso (ciò si accorda con le proprietà fisiologiche dell' occhio umano), da cui

$$m_V = K + A \log F_V \quad , \quad (3.2)$$

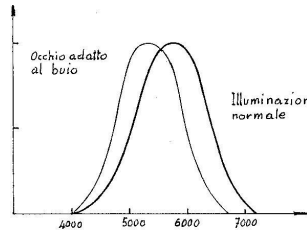


Figura 3.4: Sensibilità occhio umano

Tabella 3.1: Tabella del sistema UBVRI

<i>zona</i>	<i>lunghezza d'onda(Å)</i>	<i>larghezza banda(Å)</i>
<i>U</i>	3650	700
<i>B</i>	4400	1000
<i>V</i>	5500	900
<i>R</i>	7000	2200
<i>I</i>	8800	2400

dove K ed A sono costanti e F è il flusso della radiazione rivelata. Se si vuole che sia $\Delta m = -5$ con $\frac{F_1}{F_2} = 100$ (dimostrazione proposta dall' astronono inglese Pogson (1856)) si ha $A = -2.5$ da cui

$$m_V = K - 2.5 \log F_V \quad , \quad (3.3)$$

K è una costante che viene assegnata nel momento in cui si decide quale sarà la magnitudine della stella presa come riferimento: la scelta è tale che le stelle che si vedono appena, in una notte senza Luna di cielo sereno , in un buon punto di osservazione siano di magnitudine sesta.

Si noti che con questa definizione le stelle più brillanti avranno magnitudine negativa. Le magnitudini apparenti dipendono dalla lunghezza d' onda o colore dello strumento di osservazione e quindi vengono misurate in una piccola parte dello spettro elettromagnetico. Riportiamo nelle Tabella 3.1 il sistema UBVRI , il principale in uso in astronomia; per gli altri sistemi consultate [Nuovo Allen 2000] e [Astrophysical Formulae 1999]. Idealmente la misura del flusso F dovrebbe essere una misura di flusso totale , ma non si può registrare

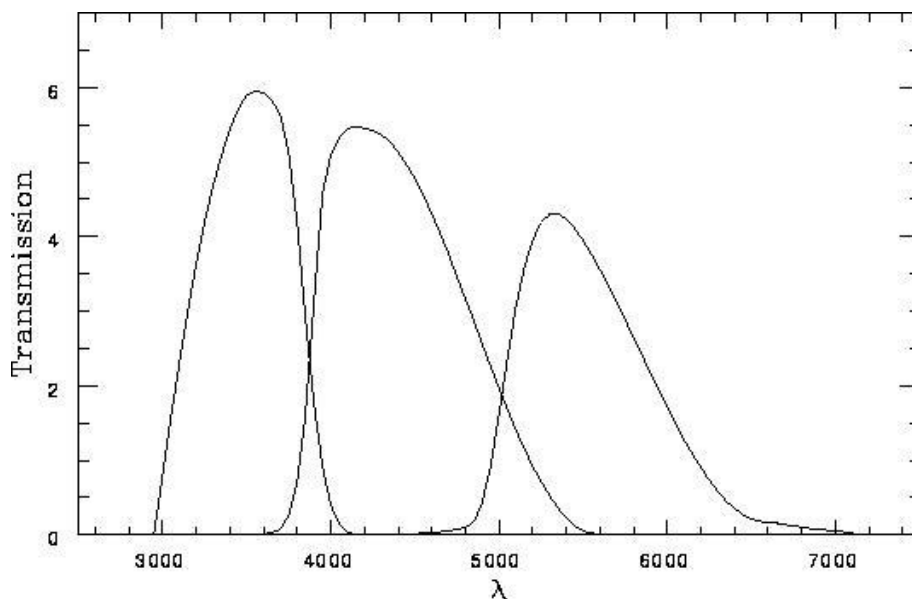


Figura 3.5: Curva di trasmissione nel sistema UBV di Johnson. L'asse x riporta gli Å e sulle y troviamo la percentuale di trasmissione

radiazione elettromagnetica con efficienza costante su tutto lo spettro e quindi ottenere

$$F = \int_0^{\infty} F_{\lambda} d\lambda \quad (3.4)$$

Si introduce perciò una funzione di risposta $\Phi(\lambda)$ legata all'apparecchio, che esprime la frazione di flusso registrata per ogni lunghezza d'onda, da cui

$$F = \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) F_{\lambda} d\lambda \quad (3.5)$$

e dunque la definizione della scala di magnitudine è legata all'apparecchiatura utilizzata, o meglio il sistema fotometrico che nel caso della magnitudine visiva è l'occhio umano. Riportiamo nella figura 3.5 la percentuale $\Phi(\lambda)$ di trasmissione nel sistema UBV di Johnson, le curve normalizzate ad uno si ottengono dividendo le ordinate per il massimo di ogni filtro.

Riportiamo nella figura 3.6 una tipica funzione di trasmissione per un sistema CCD.

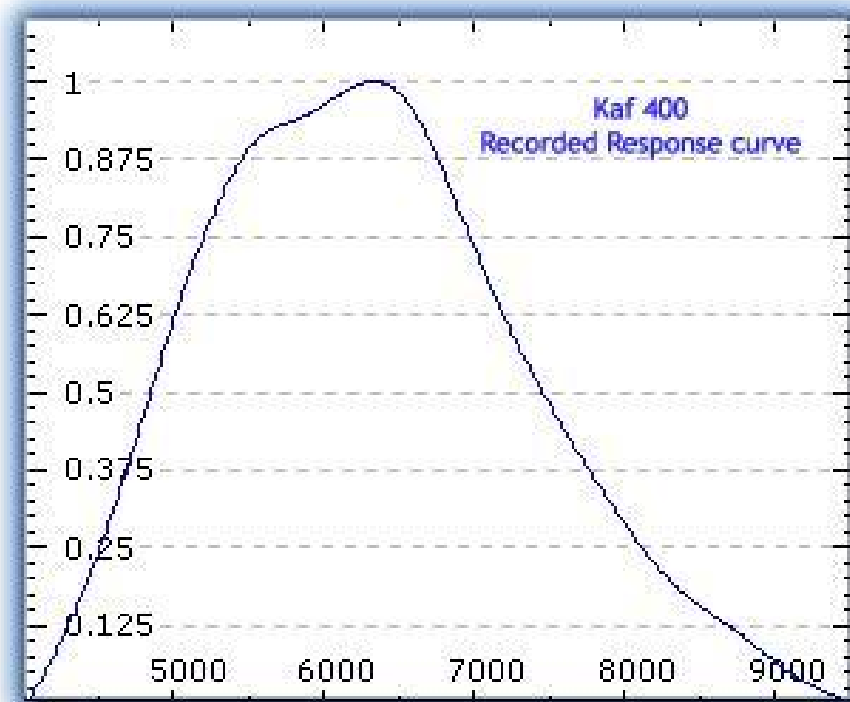


Figura 3.6: Curva di risposta di un CCD verso \AA

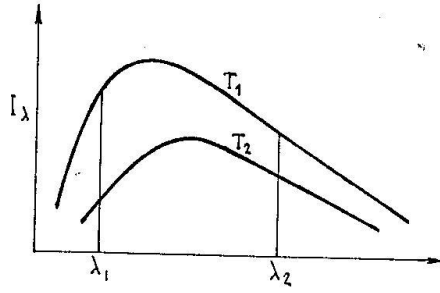


Figura 3.7: Due curve di corpo nero

3.3 Temperatura effettiva e di colore

La definizione di temperatura superficiale di una stella, detta anche *temperatura effettiva* è legata alla legge di Stefan (vedi Sezione 2.93 per i dettagli della derivazione). Essa è la temperatura di un corpo nero che emette con flusso uguale al flusso superficiale F della stella. Si ha perciò:

$$F = \sigma T_e^4 = \pi B \quad , \quad (3.6)$$

e dalla definizione di luminosità

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \quad \frac{erg}{sec} \quad , \quad (3.7)$$

dove R è il raggio della stella. Il flusso radiante S ad una distanza r vale:

$$S = \sigma \frac{R^2 T_e^4}{r^2} \quad \frac{erg}{sec \, cm^2} \quad . \quad (3.8)$$

In un corpo nero, scelte due lunghezze d'onda λ_1 e λ_2 , il rapporto delle intensità monocromatiche risulta

$$\frac{I_{\lambda_1}}{I_{\lambda_2}} = f(T) \quad , \quad (3.9)$$

funzione della temperatura, calcolabile tramite la legge di Planck come si vede dalla Fig. 3.7 dove sono mostrate due curve di corpo nero alle temperature T_1 e T_2 . Ne consegue che la misura del flusso di radiazione a due lunghezze d'onda permette di ottenere la temperatura del corpo nero. Analogamente si può ragionare per una stella: si misura la

magnitudine apparente per due sistemi fotometrici differenti, sistema B centrato sul blu e sistema V centrato sul visivo, per cui

$$\begin{aligned} m_V &= K_V - 2.5 \log F_V \\ m_B &= K_B - 2.5 \log F_B \quad , \end{aligned} \quad (3.10)$$

e perciò

$$m_B - m_V = K_B - K_V - 2.5 \log \frac{F_B}{F_V} \quad . \quad (3.11)$$

La differenza di magnitudine , detta *indice di colore* , è legata al rapporto fra flussi di radiazione che è funzione di T:

$$B - V = m_B - m_V = K' - 2.5 \log \frac{F_B}{F_V} \quad , \quad (3.12)$$

e quindi ,nota la differenza, (vedi sezione 3.3) si ricava la temperatura T_c detta temperatura di colore della stella. Si deve notare che la temperatura di colore, offre delle buone indicazioni, ma in effetti non è la temperatura di superficie. Riportiamo nel grafico 3.8 la relazione fra B-V e $1/T$ per stelle di calibrazione di classe V (sequenza principale); fonte [Nuovo Allen 2000] oppure appendice B). Applicando la teoria dei minimi quadrati troviamo che quando la temperatura alla superficie della stella T_{eff} è espressa in gradi Kelvin

$$B - V = -0.64 + \frac{7360}{T[K]} \quad . \quad (3.13)$$

3.4 La magnitudine assoluta

La magnitudine apparente ha scarso significato fisico in quanto dipende dalla distanza r di ogni corpo celeste dalla Terra . Si definisce perciò la magnitudine assoluta M_V come la magnitudine la stella avrebbe se fosse posta ad una distanza di 10 pc. Si ha utilizzando la (3.1) e la (3.3)

$$M_V - m_V = -2.5 \log \frac{L}{4\pi(10^2)} + 2.5 \log \frac{L}{4\pi(r^2)} = 2.5 \log \left(\frac{r}{10} \right)^2 \quad , \quad (3.14)$$

da cui

$$M_V = m_V + 5 - 5 \log r \quad . \quad (3.15)$$

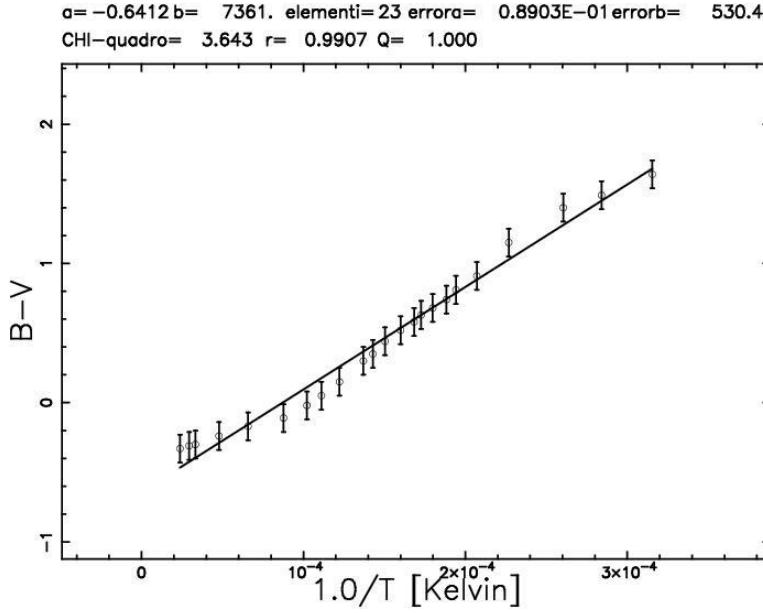


Figura 3.8: B-V contro $1/(T \text{ [K]})$ per la classe V

3.5 La magnitudine bolometrica

Il flusso totale di radiazione integrato su tutte le lunghezze d' onda definisce la magnitudine bolometrica apparente , m_{bol} , e la magnitudine assoluta bolometrica M_{bol} . La correzione bolometrica richiesta per ottenere il flusso totale da quello visuale vale

$$\text{Correzione bolometrica} = BC = M_{bol} - M_V = m_{bol} - m_V \quad . \quad (3.16)$$

Essendo che ovviamente la luminosità in una banda selezionata è sempre minore di quella globale la correzione bolometrica sarà sempre negativa. Riguardo al sole abbiamo, fonte [Nuovo Allen 2000] :

$$\begin{aligned} m_{bol\odot} &= -26.83 \text{ mag} \\ M_{bol\odot} &= 4.74 \text{ mag} \\ BC_{\odot} &= -0.08 \text{ mag} \quad . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Riportiamo nel grafico 3.9 la relazione fra BC e $T \text{ [K]}$ per stelle di calibrazione di classe V (sequenza principale) ; fonte [Nuovo Allen 2000] oppure appendice B). Quindi la frazione dell' energia totale emessa da

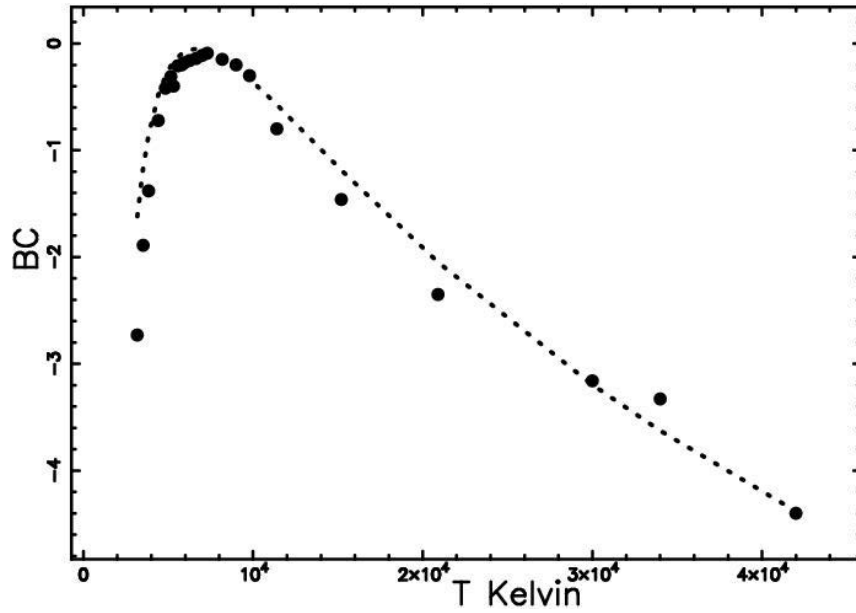


Figura 3.9: BC contro $1/(T \text{ [K]})$ per la classe V

una stella molto blu o molto rossa nell' intervallo visibile è diversa di un fattore di 4 or 5 mag dall' energia totale; in altre parole solo una percentuale minima dell' energia è irradiata nel visibile. Lo strumento adoperato è il *bolometro* che misura piccole variazioni di calore radiante o micro-onde. Misura il piccolo cambio in resistenza di un foglio in metallo o semiconduttore che si verifica in presenza di energia radiante.

Questi dati sono fittabili tramite la relazione

$$BC = 42.54 - 10 * \log(T \text{ [K]}) - 29000/T \text{ [K]} \quad . \quad (3.18)$$

3.6 Luminosità, raggi e masse stellari

Se di una stella sono noti magnitudine apparente , parallasse e temperatura da B-V oppure da indicazioni spettrali, si possono ottenere numerose altre grandezze: innanzitutto si può ottenere la magnitudine assoluta dalla 3.15 che esprimiamo in funzione della parallasse che ,

ricordiamo, si indica con il simbolo p oppure π

$$M_V = m_V + 5 + 5 \log(p) \quad . \quad (3.19)$$

Per ottenere la luminosità della stella dobbiamo invece partire dalla magnitudine bolometrica assoluta

$$M_{bol} = m_{bol} + 5 - 5 \log r \quad . \quad (3.20)$$

Introduciamo poi la magnitudine bolometrica apparente

$$m_{bol} = K - 2.5 \log(F) \quad , \quad (3.21)$$

dove $F = \frac{L}{4\pi r^2}$ e otteniamo:

$$m_{bol} = K' - 2.5 \log L + 5 \log r \quad , \quad (3.22)$$

e poi

$$M_{bol} = K'' - 2.5 \log L + 5 \quad . \quad (3.23)$$

Introducendo poi la luminosità solare , L_{\odot} e la magnitudine assoluta solare , $M_{bol\odot}$ otteniamo

$$M_{bol} = M_{bol\odot} - 2.5 \log\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) \quad . \quad (3.24)$$

Ricordiamo che $M_{bol\odot} = 4.74$ e $L_{\odot} = 3.85 \cdot 10^{33} \text{ ergs}^{-1}$. Per avere una formula di uso pratico possiamo poi esplicitare la luminosità :

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 10^{0.4(4.74 - M_{bol})} \quad , \quad (3.25)$$

dove M_{bol} è ricavata tramite la formula

$$M_{bol} = M_V + BC \quad , \quad (3.26)$$

e BC tramite la relazione 3.18 . Dallo spettro oppure dal valore di B-V si può risalire alla temperatura T_{eff} della stella e da questa al raggio usando la legge di Stefan:

$$F = \sigma T_{eff}^4 \quad , \quad (3.27)$$

ricavando la luminosità

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 \quad , \quad (3.28)$$

e poi facendo il paragone con i parametri solari

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T_{eff}}{T_{eff\odot}}\right)^4, \quad (3.29)$$

dove $R_{\odot} = 6.9 \cdot 10^{10} \text{ cm}$ e $T_{eff\odot} = 5780 \text{ K}$. Possiamo quindi facilmente ricavare un' espressione per il raggio che risulta essere uguale

$$\log \frac{R}{R_{\odot}} = \frac{\log \frac{L}{L_{\odot}} - 4 \log \frac{T_{eff}}{T_{eff\odot}}}{2}. \quad (3.30)$$

Le masse vengono invece calcolate attraverso la relazione massa-luminosità, vedi [Nuovo Allen 2000]:

$$\log \frac{L}{L_{\odot}} = 3.8 \log \frac{M}{M_{\odot}} + 0.08 \quad \text{per} \quad M > 0.2 M_{\odot}, \quad (3.31)$$

e quindi

$$\log \frac{M}{M_{\odot}} = \frac{\log \frac{L}{L_{\odot}} - 0.08}{3.8}. \quad (3.32)$$

3.7 B-V contro T, teorico

Il problema della determinazione teorica di $\frac{F_B}{F_V}$ nell' equazione 3.12 si può risolvere introducendo l' intensità ad una certa lunghezza d' onda λ che dalla stella giunge sulla Terra combinando le formule 2.74 e 2.28 :

$$I_{\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{R^2}{r^2} \frac{1}{e^{\frac{hc}{KT\lambda}} - 1}, \quad (3.33)$$

dove r è la distanza terra-stella e R il raggio della stella. L'equazione per B-V diventa perciò

$$B - V = m_B - m_V = K' - 2.5 \log \frac{\int S_B I_{\lambda} d\lambda}{\int S_V I_{\lambda} d\lambda}, \quad (3.34)$$

dove S_{λ} rappresenta la sensibilità dello strumento astronomico adottato. Per risolvere l' integrale possiamo usare due modi diversi : un metodo analitico approssimato ed uno numerico.

3.7.1 B-V analitico

Introduciamo una sensibilità a δ di Dirac

$$S_\lambda = \delta(\lambda - \lambda_i) \quad i = B, V \quad , \quad (3.35)$$

avremo quindi che

$$F_B = \frac{2\pi hc^2}{\lambda_B^5} \frac{R^2}{r^2} \frac{1}{e^{\frac{hc}{KT\lambda_B}} - 1} \quad , \quad (3.36)$$

e

$$F_V = \frac{2\pi hc^2}{\lambda_V^5} \frac{R^2}{r^2} \frac{1}{e^{\frac{hc}{KT\lambda_V}} - 1} \quad . \quad (3.37)$$

Facendo l' ipotesi che $e^{\frac{hc}{KT\lambda_V}} \gg 1$ e $e^{\frac{hc}{KT\lambda_B}} \gg 1$

$$\frac{F_B}{F_V} = \frac{\lambda_V^5}{\lambda_B^5} e^{\frac{hc}{KT}(\frac{\lambda_B - \lambda_V}{\lambda_B \lambda_V})} \quad , \quad (3.38)$$

prendendo i logaritmi avremo

$$-2.5 \log \frac{F_B}{F_V} = K - \frac{hc}{KT} \left(\frac{\lambda_B - \lambda_V}{\lambda_B \lambda_V} \right) 2.5 \text{Log} e \quad . \quad (3.39)$$

Inserendo $\lambda_B = 4450 \text{ \AA}$ e $\lambda_V = 5500 \text{ \AA}$ otteniamo :

$$B - V = K + \frac{6701}{T} \quad . \quad (3.40)$$

A questo punto non rimane che calibrare la relazione 3.40 ricordando che sul sole $B-V = 0.650$ e $T_{eff} = 5777 \text{ K}$:

$$B - V = -0.51 + \frac{6701}{T} \quad . \quad (3.41)$$

3.7.2 B-V numerico

Possiamo risolvere l'espressione 3.34 senza approssimazioni risolvendo l' integrale in maniera numerica , in questo caso $S=1$, e gli estremi di integrazione sono dati dalla tabella 3.1. Otteniamo

$$B - V = -0.48 + \frac{6534}{T} \quad . \quad (3.42)$$

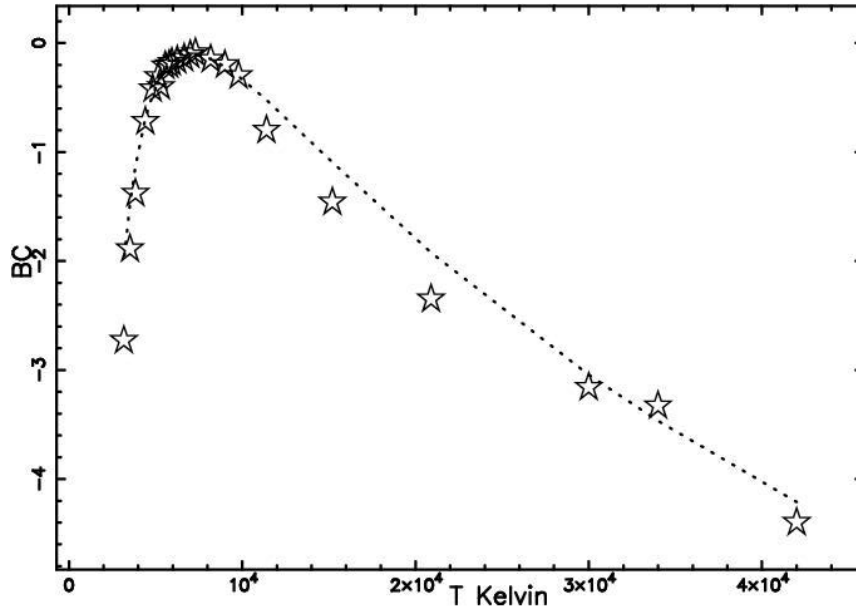


Figura 3.10: Correzione bolometrica da fit + BC per sequenza principale (simboli grossi)

3.8 Correzione bolometrica numerica

La correzione bolometrica si puo' indicare sotto la forma

$$BC = M_{bol} - M_V = -\frac{T_{BC}}{T} - 10 \log T + \alpha \quad , \quad (3.43)$$

dovremo perciò calcolare T_{BC} ed α . Una prima indicazione arriva da [Nuovo Allen 2000] che fornisce $\alpha = 42.54$ e $T_{BC} = 29000$. Adoperando il metodo di Levenberg–Marquardt ricaviamo $\alpha = 42.75$ e $T_{BC} = 30876$ per quello che riguarda la sequenza principale. Dalla Figura 3.10 possiamo realizzare dove i dati del fit si discostano da quelli di calibrazione relativi alle stelle di sequenza principale ,vedi appendice B) .

3.9 Correzione bolometrica analitica

Essendo la correzione bolometrica

$$BC = M_{bol} - M_V = K - 2.5 \log \frac{F_{BOLO}}{F_V} \quad , \quad (3.44)$$

dovremo perciò calcolare

$$BC = K' - 2.5 \log \frac{\int_0^\infty I_\lambda d\lambda}{\int S_V I_\lambda d\lambda} \quad , \quad (3.45)$$

al variare della temperatura. Partiamo dalla formula 3.45 ed esplicitiamo i termini

$$F_V = \frac{2\pi hc^2}{\lambda_V^5} \frac{R^2}{r^2} \frac{1}{e^{\frac{hc}{KT\lambda_V}} - 1} \quad , \quad (3.46)$$

e

$$F_{BOL} = \pi \frac{R^2}{r^2} \sigma T^4 \quad . \quad (3.47)$$

Facendo l' ipotesi che $e^{\frac{hc}{KT\lambda_V}} \gg 1$

$$F_V = \frac{2\pi hc^2}{\lambda_V^5} \frac{R^2}{r^2} \frac{1}{e^{\frac{hc}{KT\lambda_V}}} \quad . \quad (3.48)$$

Sviluppando i conti otteniamo

$$BC = -\frac{28402}{T} - 10 \log T + cost \quad . \quad (3.49)$$

Normalizzando ai parametri fisici del sole ,BC=-0.08 e T=5777 otteniamo

$$BC = -\frac{28402}{T} - 10 \log T + 42.54 \quad . \quad (3.50)$$

3.10 I primi 100 pc

Usando le formule ricavate nei precedenti paragrafi possiamo trovare gli intervalli di variabilità di massa , luminosità e raggio delle stelle comprese nei primi 100 pc usando come ingresso del programma unicamente B-V e M_V , vedi Tabella 3.2. I dati estratti dal catalogo Ipparco-Tycho rilasciato dall' ESA nel 1997. Le masse riportate in Tabella 3.2, ad esempio, sembrano essere in sintonia con il fatto che le masse devono essere minori della massima massa stabile ,

$$M_{max} = 60M_\odot \quad . \quad (3.51)$$

Tabella 3.2: Massimo e minimo primi 100pc

<i>parametro</i>	<i>minimo</i>	<i>massimo</i>
$\frac{M}{M_{\odot}}$	0.1	14.77
$\frac{R}{R_{\odot}}$	0.011	210.1
$\frac{L}{L_{\odot}}$	$10^{-3.4}$	$10^{4.5}$

3.11 Diagramma HR

Nel 1911 e nel 1913 da studi separati dei due scienziati Hertzsprung e Russell nacque il diagramma HR. Si tratta di disporre tutte le stelle o dei primi 25 pc, 100pc etc oppure di un cluster in un diagramma che contiene in ascissa la classificazione spettrale e quindi la temperatura in aumento da destra a sinistra, e in ordinata la magnitudine assoluta in diminuzione dal basso verso l'alto. Gli scienziati notarono subito che le stelle in questo diagramma non erano disposte a caso ma secondo una distribuzione ben precisa: innanzi tutto, la maggior parte (circa il 90 %) delle stelle è disposta lungo una curva detta *sequenza principale* e a questa curva appartiene anche il sole; inoltre il resto delle è disposto in due gruppi ben definiti: uno a destra in alto e l'altro in basso a sinistra. Riportiamo nella figura 3.11 il diagramma HR relativo ai primi 100 pc. I dati provengono dal catalogo Ipparco-Tycho rilasciato dall'ESA nel 1997. Il gruppo di stelle in alto rispetto alla sequenza principale è costituito da corpi di dimensioni più grandi di quelli che hanno la stessa temperatura, ma che stanno sulla sequenza principale, e poichè tali stelle hanno uno spettro freddo sono dette *giganti rosse*. Le stelle che stanno nel diagramma HR al di sotto del sole, sono dette *nane* e il gruppo in basso a sinistra che ha uno spettro più caldo di quello del sole costituisce il gruppo delle *nane bianche*. Si noti che sulla sequenza principale ci muove variando le masse: le stelle meno massive del sole sono in basso a destra e quelle più massive sono in alto a sinistra. Si noti che essendo per la formula 3.26

$$M_V \propto \text{Log}\left(\frac{L}{L_{\odot}}\right) \quad , \quad (3.52)$$

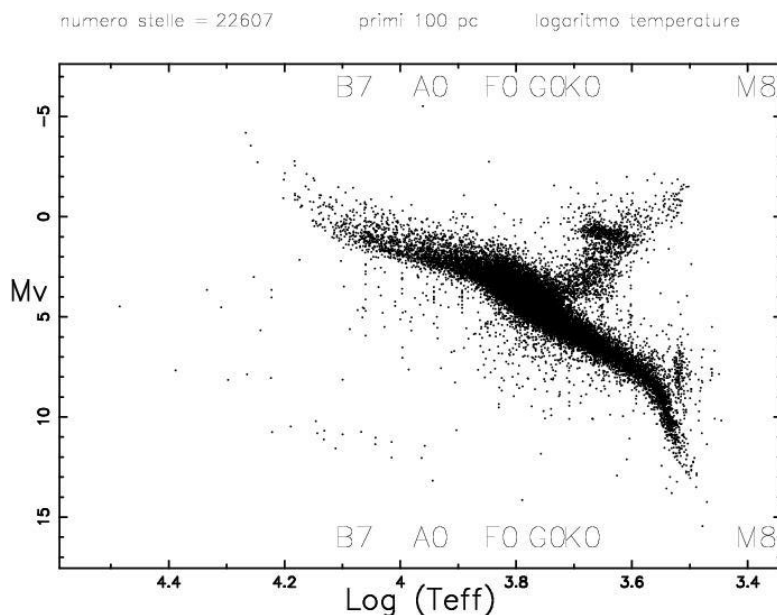


Figura 3.11: Diagramma HR dei primi 100 pc

questa grandezza può comparire il luogo della magnitudine assoluta sull'asse delle ordinate del diagramma HR e poichè per la formula 3.29

$$\text{Log} \frac{L}{L_{\odot}} = 2\text{Log} \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right) + 4\text{Log} \left(\frac{T_{eff}}{T_{eff\odot}} \right) \quad , \quad (3.53)$$

si veda che i corpi con lo stesso raggio R giacciono su una retta nel diagramma HR. Commentiamo adesso il diagramma HR dei primi 100 pc dal catalogo Ipparco-Tycho alla luce della notazione anglosassone che certamente vedrete nel futuro. La vasta maggioranza di tutte le stelle è posta lungo la sequenza principale (MS) che copre il campo dalle stelle O, luminose e calde, alle deboli, fredde e rosse stelle M. La branca subgiganti (SG) si congiunge con la MS a $(B-V) \approx 0.7$ e $M_{Hp} \approx 4$ e si estende orizzontalmente a $(B-V) \approx 1$, dove le regioni popolate si spostano improvvisamente in alto nella branca delle giganti rosse (RGB). La RGB parte da $(B-V) \approx 1$, ad una luminosità che è circa 30 volte (3.7 mag) più brillante che non le stelle MS dello stesso tipo fino a stelle più fredde e più brillanti. Queste stelle sono le giganti rosse ; esse corrispondono alla luminosità MK di classe III. Il grande picco nella densità di stelle vicino a $(B-V) \approx 1$ e $M_{Hp} \approx 1$ è conosciuto come red

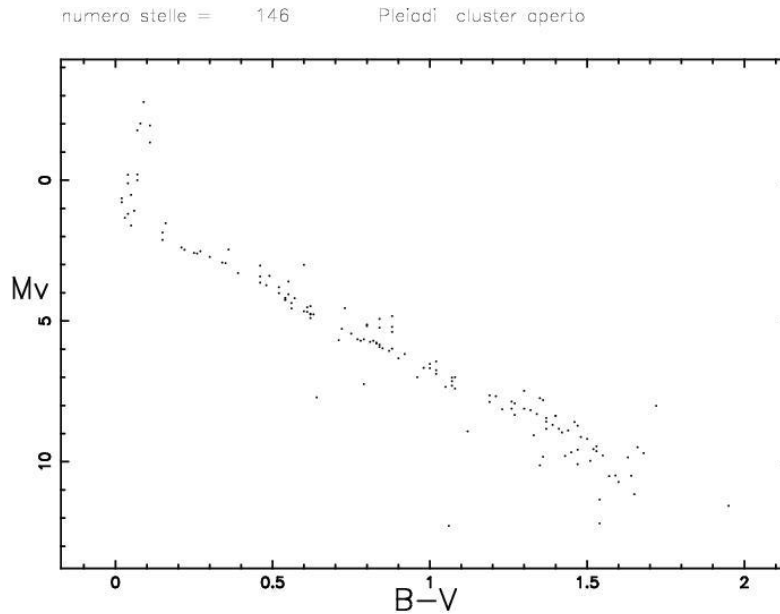


Figura 3.12: Diagramma HR delle Pleiadi

clump . Centrate su $(B-V) \approx 0$ e $M_{Hp} \approx 12$ troviamo poche deboli stelle conosciute come nane bianche. La regione fra MS e RGB ad $M_{Hp} \approx 1$ che è praticamente vuota viene chiamata Hertzsprung gap.

3.12 Diagramma HR in ammassi

E' interessante adesso studiare il diagramma HR per ammassi aperti , tipo Pleiadi (figura 3.12) e le Iadi (figura 3.13) . Da un punto di vista astronomico le Pleiadi (M45) sono un ammasso aperto nella costellazione del Toro che contiene almeno 500 stelle e grazie a misure accurate fatte con il telescopio spaziale Hubble sappiamo che dista da noi 440 anni luce (134.9 pc).

Le Iadi sono invece un cluster aperto di circa 200 stelle nella costellazione del Toro . È il cluster aperto più vicino a noi (dista 46 pc da noi) ed è scatterato su di un' area di circa 6° .

Ci sono poi gli ammassi globulari a forma sferica formati da 1000 a 1000000 stelle che condividono la stessa origine temporale. Il diagramma HR per tali ammassi non presenta invece stelle sulla parte superiore della sequenza principale e queste stelle sembrano essersi trasforma-

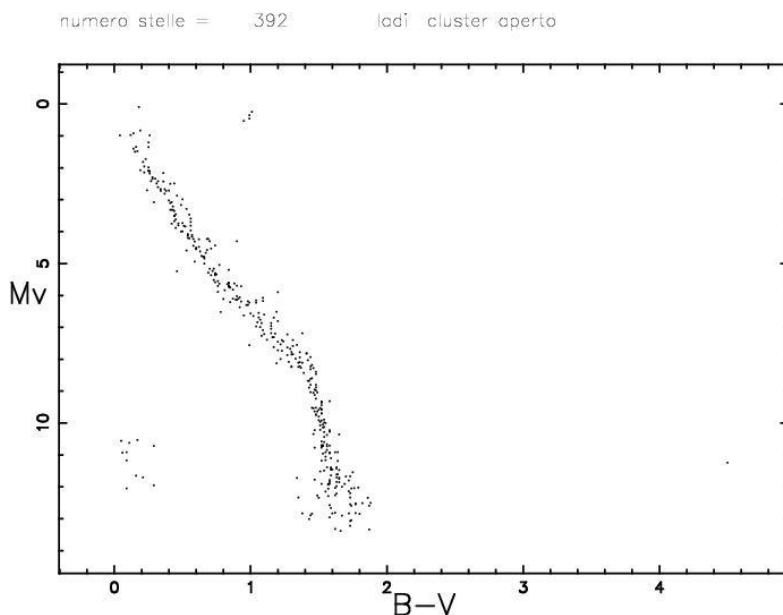


Figura 3.13: Diagramma HR delle Iadi

te in giganti rosse. Riportiamo il diagramma HR (vedi figura 3.14) per Palomar 12 basato su immagini CCD ottenute con il telescopio Canada-Francia-Hawaii da 3.6m ed il telescopio da 4m di Cerro Tololo.

3.13 Diagramma a due colori

Un ulteriore aiuto per discutere le caratteristiche di un gruppo di stelle, come le stelle di un cluster, può venire dal diagramma due colori. Nel sistema fotometrico UBV, per esempio, plottiamo (U-B) contro (B-V) per le stelle del cluster. Dato che i colori delle stelle sono principalmente indicatori della temperatura di superficie della stella, il diagramma a due colori per le stelle di un cluster rappresenta una curva continua sulla quale si situano tutte le stelle. L'eccezione è dovuta al fatto che la larghezza della banda U attraversa la discontinuità di Balmer. La discontinuità di Balmer rappresenta un salto nella distribuzione spettrale dell'energia, corrispondente all'assorbimento legato-libero dell'idrogeno neutro al limite della sequenza spettrale di Balmer, a 3653 \AA . Nelle stelle che hanno un forte assorbimento dovuto all'idrogeno neutro (per esempio le stelle A) la disponibilità di energia nella

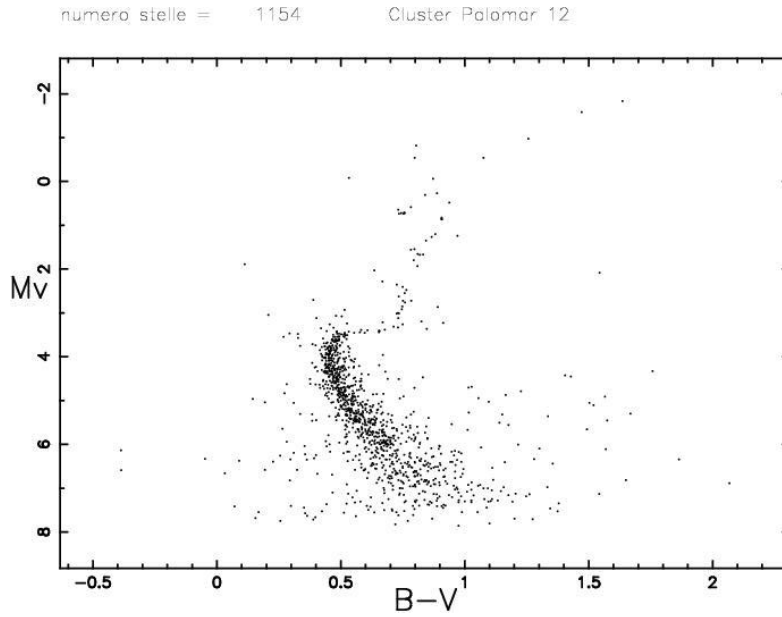


Figura 3.14: Diagramma HR di Palomar 12

banda U è abbassata dalla discontinuità di Balmer. Come risultato il valore di (U-B) per queste stelle è più grande del valore aspettato dalla distribuzione di Planck ed il diagramma a due colori (U-B), (B-V) ha un massimo locale in (U-B), vedi figura 3.15 nella quale è anche riportato l'andamento teorico prospettato dal rapporto di flussi di corpo nero.

In figura 3.16 riportiamo invece il diagramma a due colori per le 3800 stelle più brillanti.

3.14 Relazione massa-luminosità

Compiendo studi accurati su tantissime stelle si è potuta ottenere una relazione tra massa M e luminosità delle stelle di sequenza principale :

$$L \propto M^\alpha \quad . \quad (3.54)$$

Poichè il tempo τ di vita di una stella in sequenza principale è proporzionale al rapporto fra contenuto energetico e luminosità

$$\tau \propto \frac{Mc^2}{L} \quad , \quad (3.55)$$

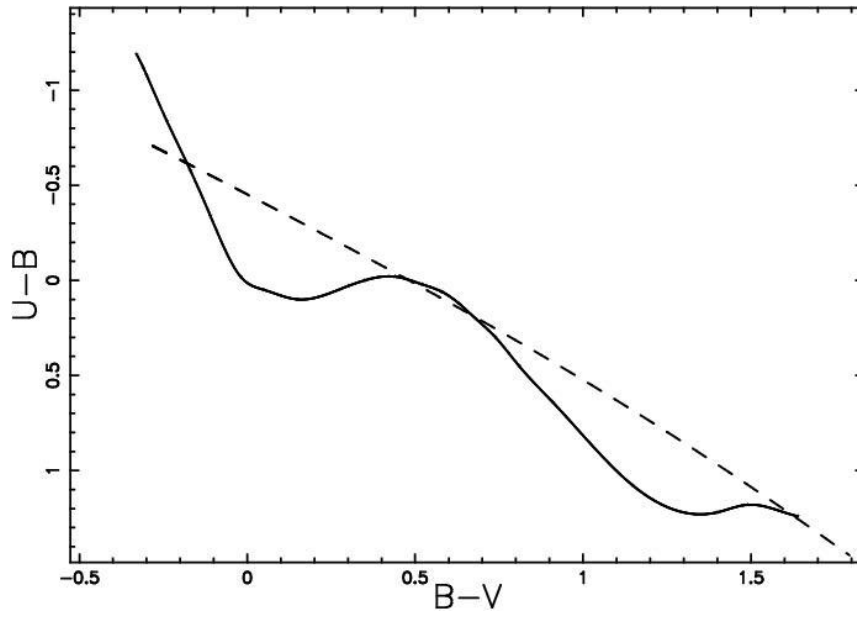


Figura 3.15: Diagramma a due colori ($B-V, U-B$) per le stelle di classe V (sequenza principale)

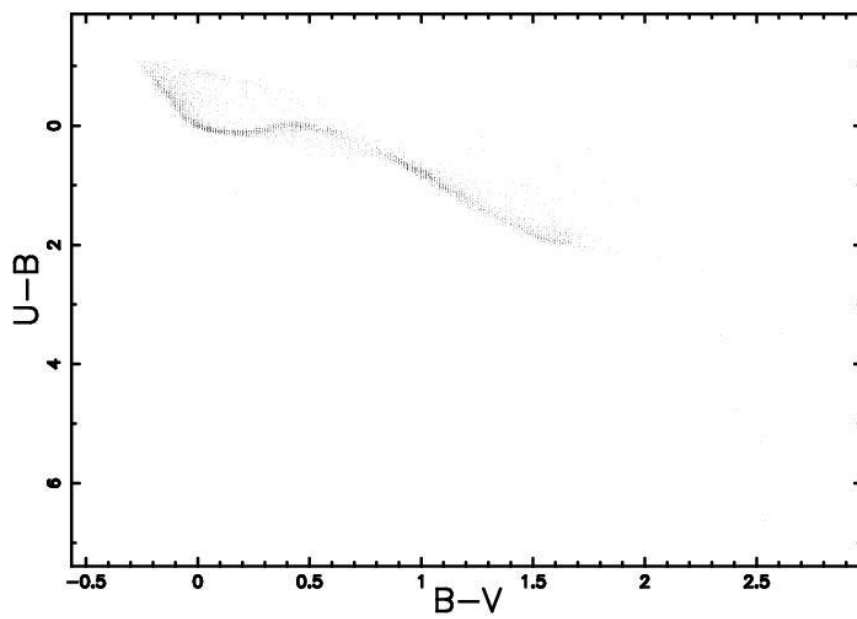


Figura 3.16: Diagramma a due colori ($B-V, U-B$) per le 3800 stelle più brillanti

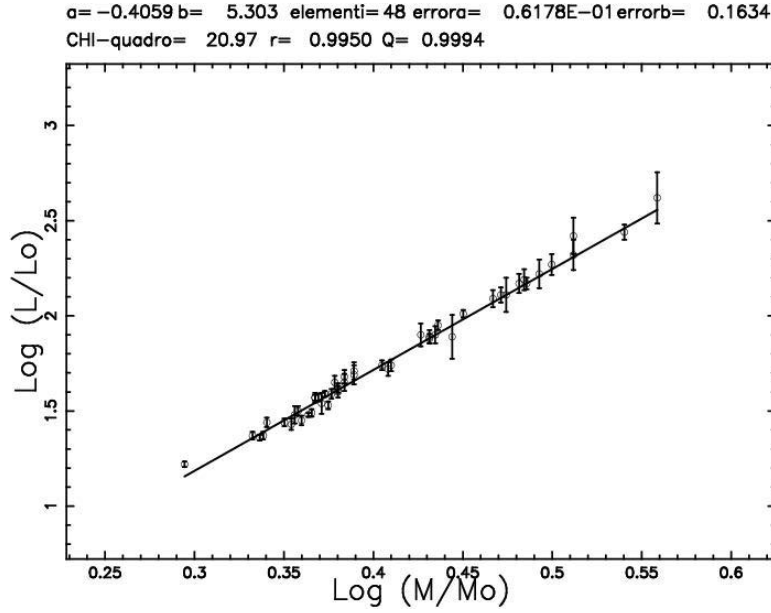


Figura 3.17: Relazione Massa luminosità per stelle A0

si ha

$$\tau \propto \frac{M}{M^\alpha} = M^{-\alpha+1} \quad . \quad (3.56)$$

Il valore di α dipende molto dal campione scelto per le analisi. Riportiamo in figura 3.17 i dati di Ipparcos per le 71 stelle A0 più vicine combinati con altri dati in modo da ottenere masse e luminosità con metodi standard in Astronomia. In questo caso il range delle masse è molto ristretto. I dati si analizzano applicando i minimi quadrati sui logaritmi delle quantità coinvolte ed otteniamo

$$\log \frac{L}{L_\odot} = 5.3 \log \frac{M}{M_\odot} - 0.4 \quad \text{per stelle A0} \quad . \quad (3.57)$$

Il range invece più esteso per quanto riguarda le masse si ottiene dai dati sulle stelle doppie. Riportiamo in figura 3.18 i dati di 288 stelle binarie con masse ben determinate. Anche quì i dati si analizzano applicando i minimi quadrati sui logaritmi delle quantità coinvolte ed otteniamo

$$\log \frac{L}{L_\odot} = 3.92 \log \frac{M}{M_\odot} + 0.03 \quad \text{per stelle binarie} \quad . \quad (3.58)$$

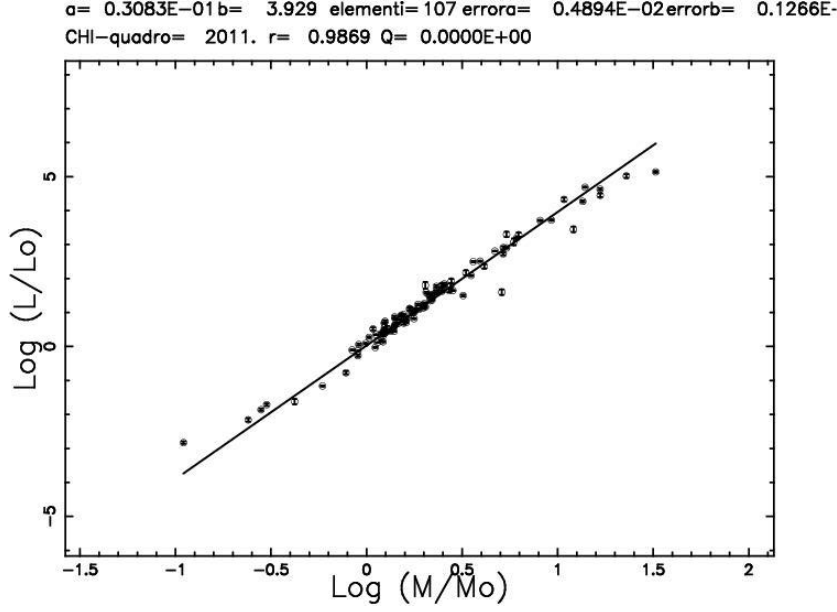


Figura 3.18: Relazione Massa luminosità per stelle binarie

La vita media del Sole è $\tau = 10^{10}$ anni in sequenza principale, per cui le nane bianche che hanno massa $M = \frac{M_{\odot}}{10}$ avranno , mettendo in prima approssimazione $\alpha=4$

$$\tau \propto \tau_{\odot} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-\alpha+1} = 10^{13} \text{anni} \quad , \quad (3.59)$$

mentre le giganti blu che hanno massa $M = 10 M_{\odot}$ avranno , sempre con $\alpha=4$,

$$\tau = 10^7 \text{anni} \quad , \quad (3.60)$$

e si comprende perciò che mentre le nane bianche possono essere in sequenza principale dall' inizio della vita dell' universo, le giganti blu vi stazionano pochissimo. Queste considerazioni spiegano le evoluzioni degli ammassi citati nella sezione 3.12: negli ammassi giovani ci sono delle giganti blu che evolveranno velocemente e scompariranno dalla sequenza principale ; col tempo si raggiungerà la configurazione degli Ammassi Globulari. Una legge teorica per la relazione massa-luminosità può essere dedotta sulla base di considerazioni generali. Una stella di sequenza principale è sostenuta dalla pressione del gas cosicchè la loro temperatura interna, T , scala come in modo inverso col raggio R e

direttamente con la sua massa M , ovvero $T = costante \frac{M}{R}$. Facendo l'assunzione che il calore interno sia trasportato dalla radiazione e che l'opacità stellare sia indipendente dalla massa, segue che la luminosità stellare debba crescere con la quarta potenza della temperatura e la terza potenza della massa ; ovvero sia

$$L \propto \frac{R^4 T^4}{(k)M} \propto M^3 \quad , \quad (3.61)$$

per una stella di sequenza principale con opacità media (k).

Capitolo 4

Spettroscopia Stellare

4.1 L' Atomo di idrogeno

L' idrogeno è l' elemento più abbondante dell' universo di un fattore molto grande, e costituisce la parte maggiore del mezzo intersellare e di tutte le stelle normali. Le proprietà fisiche del materiale stellare sono quindi dominate dalle proprietà dell' atomo di idrogeno. In questo paragrafo enfatizzeremo la struttura elettronica dell' idrogeno , i livelli di energia ,lo spettro associato e introdurremo il linguaggio della spettroscopia stellare. I principali livelli dell' atomo di idrogeno possono essere derivati tramite argomenti semiclassici applicati ad un atomo che si muova in un orbita circolare di raggio a attorno ad un protone. Classicamente, la forza di Coulomb è bilanciata dalla forza centripeta :

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{e^2}{a^2} \quad (4.1)$$

dove m è la massa ridotta del sistema. L' integrale di azione $\oint p dq$ può avere qualsiasi valore in un sistema classico ma in sistemi legati può cambiare il suo stato solamente in unità di \hbar . Per l' atomo di idrogeno il momento generalizzato p è il momento angolare e $dq=d\phi$; cosicchè l' integrale di azione diventa:

$$\oint p dq = mva = mva \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi mva = nh \quad , \quad (4.2)$$

oppure

$$mva = n\hbar \quad , \quad (4.3)$$

dove n è un intero positivo. Eliminando la velocità fra le due precedenti equazioni otteniamo il raggio orbitale:

$$a_n = \frac{n^2 \hbar^2}{me^2} = n^2 a_0 \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad , \quad (4.4)$$

dove a_0 è il raggio di Bohr per l'idrogeno. L'energia totale del sistema legato di due cariche è la metà dell'energia potenziale, o, usando i risultati precedenti,

$$E_n = -\frac{e^2}{2a_n} = -\frac{me^4}{2n^2 \hbar^2} \quad . \quad (4.5)$$

Notate che $m \approx m_e$ ai fini pratici. In assenza di forze esterne ci sono $2n^2$ stati con energia E_n . In assenza di un campo magnetico, i livelli di energia del singolo elettrone nell'atomo di idrogeno sono ben rappresentati dalla formula

$$E_n = -Z^2 \frac{me^4}{2n^2 \hbar^2} \equiv \frac{Z^2 \mathcal{R}}{n^2} \quad . \quad (4.6)$$

Dove Z è la carica atomica sul nucleo in unità della carica dell'elettrone. Questa vale uno per l'atomo di idrogeno, ma includiamo esplicitamente Z perchè molti ioni, come l' He^+ , hanno spettri del tipo dell'idrogeno, che l'equazione 4.6 descrive con buona accuratezza. Qui n è il numero quantico principale, ed è usato per classificare i livelli di energia. L'energia data dall'equazione 4.6 è negativa, andando a zero con $n \rightarrow \infty$. E_n rappresenta l'energia di legame fra ione ed elettrone. Lo stato più strettamente legato (lo stato fondamentale) ed il più basso livello di energia occorrono per $n=1$; hanno una energia di legame

$$-E_1 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = 2.18^{-11} Z^2 \text{ergs} = 13.6 Z^2 \text{eV} = \mathcal{R} Z^2 \quad . \quad (4.7)$$

La quantità \mathcal{R} è chiamata costante di Rydberg. Lo stato $n=1$ è lo stato fondamentale, e $13.6 Z^2 \text{eV}$ è il potenziale di ionizzazione (oppure $13.6 Z^2 \text{eV}$ è l'energia di ionizzazione) dallo stato fondamentale. I livelli di energia negativa corrispondenti agli stati legati per l'idrogeno sono mostrati nella figura 4.1

Energie positive corrispondono ad un elettrone libero. Comunque, l'elettrone si muove nel campo elettromagnetico del protone; cosicchè

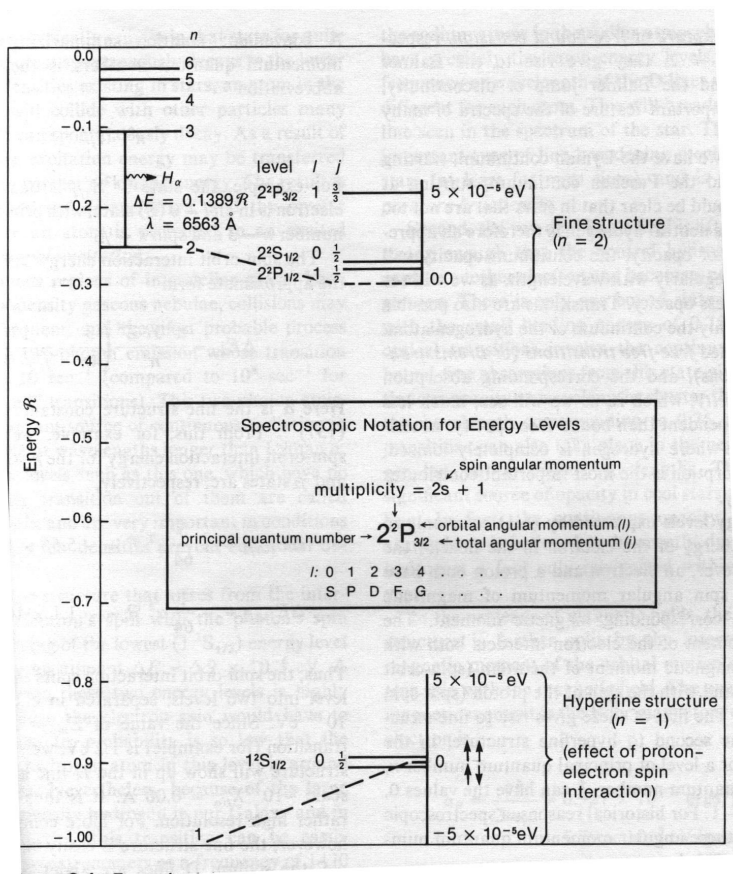


Figura 4.1: Livelli di energia nell' atomo dell' idrogeno. L' inserto nella parte alta a destra mostra la struttura fine per lo stato $n=2$. Lo spostamento di Lamb fra gli stati $2^2S_{1/2}$ e $2^2P_{1/2}$ corrispondono a $\Delta E = 4.4 \times 10^{-6} \text{ eV}$. L' inserto in basso rappresenta la struttura iperfine dello stato $n=1$. La differenza di energia fra i due stati è $\Delta E = 5.8 \times 10^{-6} \text{ eV}$. Il fotone emesso nella transizione fra questi due stati ha energia $\nu = \Delta E/h = 1420 \text{ MHz}$, corrispondenti a $\lambda = 21.11 \text{ cm}$

Tabella 4.1: Le serie di Transizione

<i>Livello più basso</i>	<i>transizione principale</i>
$n = 1, \textit{ Lyman}$	$L_\alpha = 1216\text{\AA}$
$n = 2, \textit{ Balmer}$	$H_\alpha = 6563\text{\AA}$
$n = 3, \textit{ Paschen}$	$P_\alpha = 18750\text{\AA}$

gli stati di energia libera devono essere considerati insieme agli stati legati come parte della struttura totale dell' energia dell' atomo di idrogeno . I livelli di energia dell' elettrone libero non sono quantizzati , ed ogni energia e' permessa. Questi livelli sono qualche volta chiamati il continuo dell' energia. Le transizioni fra i livelli di energia accompagnati dall' emissione ($E_m > E_n$) o dall' assorbimento ($E_n > E_m$) di un fotone di frequenza ν hanno energia $h\nu$ data dall' usuale relazione di Planck

$$h\nu = |E_m - E_n| \quad . \quad (4.8)$$

La spaziatura dei livelli di energia nell' atomo di idrogeno è tale che transizioni con lo stesso livello inferiore danno origine a fotoni nella stessa regione generale dello spettro. Cosicchè lo spettro dell' idrogeno è classificato in accordo con una serie di transizioni , tutte aventi lo stesso livello inferiore n . Le più importanti di queste transizioni sono mostrate nella tabella 4.1 .

Le serie sono designate con le lettere L , H e P rispettivamente e α indica la prima linea della serie . Ovverosia H_α è la transizione fra i livelli $n=3$ e $n=2$; H_β è la transizione fra i livelli $n=4$ e $n=2$; e così via. La serie di Balmer è la sola che stà nella parte visibile dello spettro , ed è caratteristica dello spettro di idrogeno visto nelle scariche dei tubi nei laboratori e negli spettri di molte stelle. Le prime linee nella serie di Balmer sono

$$\begin{array}{ll} H_\alpha & \lambda = 6563\text{\AA} \quad , \\ H_\beta & \lambda = 4861\text{\AA} \quad , \\ H_\gamma & \lambda = 4340\text{\AA} \quad , \\ H_\delta & \lambda = 4101\text{\AA} \quad . \end{array}$$

Queste transizioni danno origine ad assorbimento od emissione di fotoni a lunghezze d' onda discrete che così corrispondono ad assorbimento od emissione nello spettro dell' idrogeno. Una transizione da $n=2$ al continuo produce assorbimento od emissione sopra un vasto range di lunghezze d' onda, partendo dalla lunghezza d' onda corrispondente alla energia di ionizzazione dal livello $n=2$. Questa è 3.4 eV, e la corrispondente lunghezza d' onda è 3647 Å. Così l' assorbimento nel continuo degli stati di energia produce un' opacità continua a lunghezze d' onda minori di 3647 Å. In corrispondenza, una transizione dal continuo al livello 2 produce emissione di fotoni a lunghezze d' onda minori di 3647 Å, ovverosia emissione continua. Questi due processi sono spesso chiamati fotoionizzazione o assorbimento legato-libero e ricattura od emissione libero-legato rispettivamente. Per $n=2$, essi originano il continuo Balmer ed il salto o la discontinuità di Balmer, che è una importante caratteristica degli spettri di molte stelle. In modo analogo, abbiamo il continuo di Lyman partendo da 912 Å ed il continuo di Paschen partendo dal 8204 Å. Dovrebbe essere chiaro che in stelle che non sono troppo calde, e dove quindi l' idrogeno neutro è un' apprezzabile sorgente di opacità, l' opacità nel continuo varierà irregolarmente con la lunghezza d' onda. Sono quindi possibili delle transizioni che coinvolgono solamente il continuo dell' atomo di idrogeno. Queste sono chiamate transizioni libero-libero e l' assorbimento corrispondente opacità libero-libero che dipende meno dalla frequenza rispetto all' opacità legato-libero. Negli interni stellari, dove l' idrogeno è completamente ionizzato, l' assorbimento libero-libero è il più importante contributo all' opacità. I livelli energetici espressi dalla (4.6) si riferiscono solamente all' energia orbitale dell' elettrone nel campo del protone. Comunque, un elettrone ed un protone hanno ambedue uno spin angolare intrinseco di valore $\hbar/2$ ed un corrispondente momento magnetico. Il momento magnetico dell' elettrone interagisce sia con il momento magnetico orbitale dell' atomo (interazione spin-orbita) e con lo spin del protone (interazione spin-spin). La prima di queste due dà origine alla struttura fine mentre la seconda origina la struttura iperfine nello spettro. Dato un livello di numero quantico principale n , il numero quantico orbitale l può avere valori 0,1,2,...,n-1. Per ragioni storiche continua ad essere usata la notazione spettroscopica per questi momenti angolari

S , P , D , F ,

$$l=0, 1, 2, 3, \dots$$

Il momento angolare totale corrispondente ad uno stato specificato da un numero quantico l vale $[l(l+1)]^{1/2}\hbar$. Lo spin dell'elettrone ha numero quantico $1/2$; cosicchè il suo momento angolare di spin vale $[l(l+1)]^{1/2}\hbar \sqrt{3}/2$. Il momento angolare orbitale e il momento angolare di spin interagiscono per produrre un momento angolare totale j , dato da $j = l \pm 1/2$.

stato	$S(l=0)$	$j=1/2$,
stato	$P(l=1)$	$j=1/2, 3/2$,
stato	$D(l=2)$	$j=3/2, 5/2$.

Una notazione conveniente che sommarizza i numeri quantici concernenti il momento angolare è la abbreviazione spettroscopica

$$n^{2j+1}l_s \quad . \quad (4.9)$$

Per esempio lo stato $3^2S_{1/2}$ è quello in cui l'elettrone è in uno stato $l=0(S)$, con numero quantico principale $n=3$ e $\text{spin}=1/2$. L'energia spin-orbita può essere scritta in forma approssimata

$$\Delta E_{n,j} = \frac{\alpha^2 \mathcal{R} Z^4}{n^3} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{j+1/2} \right) \quad . \quad (4.10)$$

Dove α è la costante di struttura fine $\alpha = e^2/\hbar c \approx (137)^{-1}$. Da questo, per esempio, vediamo che l'energia di interazione spin-orbita per gli stati $n=2, l=1, j=1/2$ e $3/2$ sono rispettivamente

$$\begin{aligned} \Delta E_{j=1/2} &= -\frac{5}{64}\alpha^2 \mathcal{R} = -5.66 \times 10^{-5} \text{eV} \quad , \\ \Delta E_{j=3/2} &= -\frac{1}{64}\alpha^2 \mathcal{R} = -1.1 \times 10^{-5} \text{eV} \quad . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Cosicchè l'interazione spin-orbita divide il livello $n=2$ in due livelli separati in energia da $4.5 \times 10^{-5} \text{eV}$. Poichè, per esempio, il livello $E_m - E_n$ per la transizione H_α è 1.2eV , vediamo che la struttura fine sarà visibile nella linea H a lunghezza d'onda dell'ordine di $\approx 10^{-5} \lambda_\alpha = 0.06 \text{\AA}$. È visibile quindi solo ad alta risoluzione. Per atomi più complicati comunque la struttura fine si può visualizzare

facilmente; per le linee D del Sodio sono distanti 6 \AA . La differenza si origina perchè la valenza degli elettroni nel Sodio è soggetta ad un differente potenziale (non-idrogenico) , causato dalla presenza di altri elettroni nell' atomo. L' astrofisica della materia interstellare è fortemente influenzata dalla transizione in cui gli elettroni cambiano l' orientamento dello spin, anche se questa ha una probabilità molto bassa di avvenire. Per esempio la transizione da $2^2S_{1/2}$ non cambierà il momento orbitale dell' elettrone. Comunque, il fotone emesso nella transizione si porterà via un unità di momento angolare. Poichè il momento angolare deve essere conservato nella transizione, l' unica maniera in cui ciò può avvenire per l' elettrone è invertire il suo spin. Questa transizione è vietata (i.e. avviene con una probabilità estremamente bassa). Un atomo di idrogeno in uno stato $2^2S_{1/2}$ rimarrà in quello stato per un tempo abbastanza lungo prima di decadere nello stato ad il livello più basso. Alle densità che esistono nelle stelle un atomo nello stato $2^2S_{1/2}$ colliderà con altre particelle più volte prima di decadere spontaneamente. Come risultato delle collisioni l' energia di eccitazione può essere traferita al compagno di collisione come energia cinetica. Questo risultato è conosciuto come de-eccitazione collisionale, ed il processo inverso (dove un atomo è promosso ad uno stato eccitato) è la eccitazione collisionale. Nelle regioni tenue dello spazio interstellare o nelle nebulose le collisioni sono poco frequenti; l' emissione più probabile sarà un processo ad emissione di due fotoni il cui tasso di transizione è 10 sec^{-1} (che va comparato con $\approx 10^8 \text{ sec}^{-1}$ per una transizione permessa normale). Questa emissione di due fotoni è un importante sorgente di radiazione continua nelle nebulose a lunghezza d' onda maggiore della Lyman α . Livelli atomici come questo, che non hanno un alta probabilità di transizione sono chiamati livelli metastabili, e sono molto importanti in condizioni in cui densità estremamente basse precludono la de-eccitazione collisionale. La struttura iperfine che si genera dalla interazione dello spin dell' elettrone con lo spin del fotone produce una divisione del livello più basso $1^2S_{1/2}$ nell' idrogeno di ampiezza $\Delta E = 5.9 \times 10^{-6} \text{ eV}$. La transizione fra questi due livelli è altamente proibita perchè lo spin dell' elettrone deve cambiare direzione. La sua probabilità è così bassa che la vita media dell' idrogeno in questo livello è circa $1.1 \cdot 10^7 \text{ anni}$. Ciononostante data la massiccia presenza di idrogeno a bassa densità nella nostra galassia ed in quelle vicine, questa transizione può facilmente essere osservata alla frequenza di 1420 MHz , od alla lunghezza di 21 cm. Questa transizione è usata

per mappare la densità dell' idrogeno neutro nelle varie regioni della galassia e per esplorare la struttura del disco galattico.

4.2 Classificazione degli spettri stellari

Ci sono due differenti modi di estrarre informazioni astrofisiche dagli spettri stellari: l' analisi degli spettri e la classificazione stellare. Se si analizza la luce da una stella con uno spettrografo osserviamo un continuo molto luminoso sul quale troviamo sovrapposte delle linee di assorbimento ed occasionalmente linee di emissione. La distribuzione dell' energia nel continuo ed i profili delle linee sono determinati dalle condizioni fisiche nelle atmosfere stellari : la temperatura , la densità, il campo di velocità , il campo magnetico , l' abbondanza degli elementi e così via ... Quindi , da una analisi teorica di questi comportamenti possiamo dedurre una descrizione dettagliata sulla struttura e composizione degli strati esterni. I dati di base richiesti per un' analisi dello spettro sono descrizioni quantitative dei profili delle linee e descrizioni delle variazioni di frequenza del continuo. Questi dati sono ottenuti da misure spettroscopiche. Le informazioni sul continuo possono essere ottenute da indici di colore o da distribuzioni assolute di energia. I dati sulle linee sono ottenuti da spettri ad alta dispersione e sono usualmente quantificati determinando la *larghezza equivalente* della linea: questa è la larghezza di una sezione del continuo vicino alla linea che contiene tanta luce come se provenisse dalla linea (per una linea di emissione) o bloccata dalla linea , vedi figura 4.2.

L' essenza della procedura per determinare le condizioni fisiche negli strati esterni di una stella è di descrivere lo spettro della stella con un piccolo numero di indici numerici e poi , tramite un calcolo teorico che adopera leggi conosciute, determinare le condizioni fisiche nelle atmosfere stellari che sono richieste per produrre i valori numerici richiesti. In pratica queste procedure richiedono molto tempo e sono ristrette a poche stelle brillanti delle quali sono disponibili degli spettri adeguati. Nella *classificazione stellare* si raggruppa semplicemente un insieme spettri che hanno la stessa struttura senza, in prima istanza, cercare di capire il significato fisico di queste caratteristiche. In principio, uno può classificare in termini di tutto lo spettro , ma in pratica la maggior parte delle classificazioni sono basate solo su quella parte dello spettro trasmessa attraverso l' atmosfera della terra. Prima si sceglie uno o più

3.3 Classification of stars

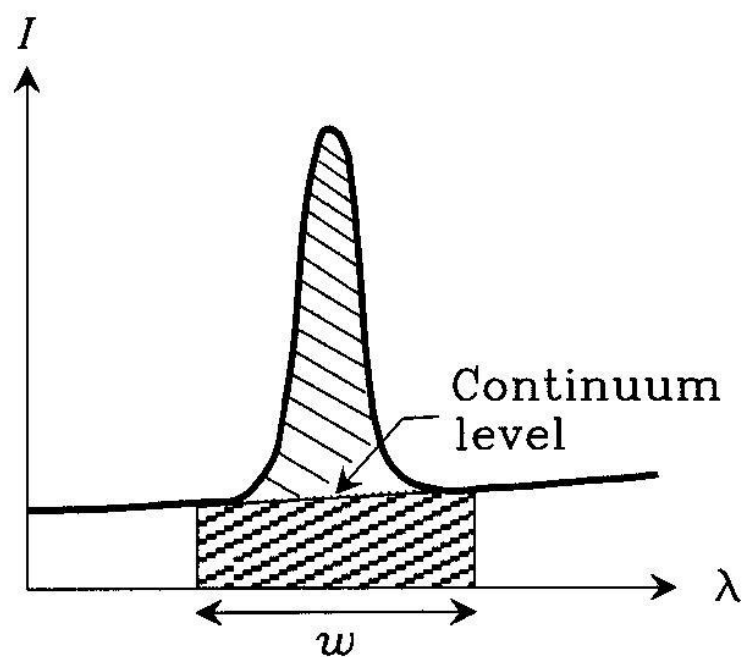


Figura 4.2: La *larghezza equivalente* della linea di emissione qui mostrata è la larghezza del trapezio ombreggiato; questo trapezio ha la stessa area dell' area tratteggiata

insiemi (dimensioni) con le quali si categorizza lo spettro. Il sistema standard adesso in uso (il sistema MKS) in discussione quì sotto impiega due sistemi di etichette, quindi è bidimensionale. Per ogni scelta di etichette, uno dichiara il nome di una stella standard il cui spettro definisce la tipologia della classificazione. Successive scelte di etichette ai quali gli standard sono assegnati stabilisce delle scatole di classificazione e la variazione della natura dello spettro da scatola a scatola è fissato dalle proprietà degli standard in quelle scatole. Ogni scatola di classificazione corrisponde ad un unico tipo spettrale del sistema. Quando tutto il sistema è definito, uno classifica una stella trovando il sistema standard il cui spettro le si avvicina di più. In questo modo, ogni stella è messa in una delle scatole del sistema di classificazione. Se le dimensioni sono scelte in maniera astuta e se il processo di classificazione è fatto in maniera accurata usando criteri ben definiti allora

- un gruppo di stelle appartenenti tutte allo stesso tipo saranno in fatto identiche in quelle condizioni fisiche che producono variazioni nei criteri di classificazione
- gruppi con tipi differenti saranno distinguibili l'uno dall'altro in maniera significativa.

Dopo che il sistema è stato definito e le classificazioni fatte si calibra il sistema in termine di parametri fisici come temperatura stellare, composizione chimica e così via. Stime quantitative di questi parametri sono derivate per ogni tipo spettrale facendo un'analisi dettagliata dello spettro su un membro tipico di quel tipo. A quel punto uno può dire che se una stella ha un certo tipo spettrale, allora la temperatura di luminosità od un'altra proprietà di quel tipo possono essere assegnate senza ulteriori analisi. Il tipo spettrale dà così una descrizione concisa dello spettro e delle proprietà fisiche della stella. In pratica, la classificazione è fatta normalmente tramite ispezione visuale di uno spettro di dispersione moderata, e può essere portata avanti per un numero grande di stelle. Il primo lavoro pionieristico è stato portato avanti nel 1860 da Padre A. Secchi, che divise gli spettri in quattro larghi gruppi. Classificazioni analoghe furono fatte in quel periodo da W. Huggins e H.C. Vogel. I primi grandi passi verso il sistema attuale furono fatti all'Osservatorio di Harvard nel 1890. Sotto la direzione di E.C. Pickering, Williamina P. Pickering pubblicò un catalogo di 10000 stelle raggruppate in un sistema di tipo spettrale con le lettere A,B,C

VizieR Result Page

CDS · Simbad · VizieR · Aladin · Catalogues · Nomenclature · Biblio · Tutorial · Developer's corner

Result of VizieR Search (no constraint specified) [Modify the Query](#)

Max. Entries: 5 Output layout: HTML Table ALL columns [ReSubmit](#) [B](#)

III/135A/catalog Henry Draper Catalogue and Extension (Cannon+ 1918-1924; ADC 1989) [ReadMe](#)

The catalogue

To get all details for a row, just click on the row number in the leftmost "Full" column.
The 3 columns in color are computed by VizieR, and are not part of the original data.

Full	RAJ2000	DEJ2000	HD	DM	RAB1900	DEB1900	Pm	Ptg	SpType	Tycho
	"h m s"	"d m s"			"h m s"	"d m s"	mag	mag		
1	00 05 2	+67 50	1	BD+67 1599	00 00.0	+67 17	7.70	8.70	K0	Tycho
2	00 05 2	+57 46	2	BD+56 3142	00 00.0	+57 13	8.60	9.00	F5	Tycho
3	00 05 1	+45 13	3	BD+44 4550	00 00.0	+44 40	6.51	6.51	A0	Tycho
4	00 05 1	+30 19	4	BD+29 5059	00 00.0	+29 46	8.40	8.70	F0	Tycho
5	00 05 1	+02 22	5	BD+01 4825	00 00.0	+01 49	9.00	9.80	G5	Tycho

(Result truncated to 5 rows)

Available Visualisations:
• [Plot the results with the VOPLOT utility](#)

[VizieR Service at Centre de Données astronomiques de Strasbourg](#)

Figura 4.3: Le prime 5 righe del catalogo Henry Draper

e così via . Nel 1888 , Antonia C. Maury senza il beneficio di dati astrofisici, ordinò questi tipi spettrali nella sequenza attuale studiando unicamente la progressione della configurazione delle righe negli spettri. Più tardi , Annie J. Cannon introdusse la suddivisione decimale dei tipi spettrali , e in quattro anni partendo dal 1911 essa classificò ≈ 225000 stelle su questo sistema. Queste classificazioni furono pubblicate nel catalogo *Henry Draper*. Dalle osservazioni dei rapporti nell' intensità delle linee a stadi di successiva ionizzazione e dai dati fotometrici, questa sequenza spettrale O , B, A, F , G, K , M fù riconosciuta più tardi essere una sequenza di temperatura. Dei tipi addizionali R,N,S furono aggiunti alla fine fredda della sequenza per descrivere le stelle nel range K-M con composizioni spettrali completamente diverse. Riportiamo in figura 4.3 una minima parte del catalogo Henry Draper , come scaricato da CDS.

Finalmente con la con l' avvento della teoria della ionizzazione di Saha nel 1920 fu possibile fare una classificazione quantitativa degli

spettri e nel 1925 una trattazione teorica degli spettri comparve nel libro di Cecilia Payne *Stellar Atmospheres*. Con i lavori di E. Hertzsprung e H.N. Russell negli anni dal 1905 al 1913, diventò evidente che stelle di un certo tipo spettrale possono avere luminosità molto differenti e questo fatto implica che possono avere raggi e densità atmosferiche completamente diverse. Le stelle più comuni sono chiamate **nane**; le stelle brillanti e grosse sono chiamate giganti; le stelle più brillanti e più brillanti sono chiamate supergiganti. Gli effetti di cambiamento nelle dimensioni stellari si riflettono direttamente nel cambiamento degli spettri e quindi un secondo parametro è richiesto per descrivere completamente lo spettro. Un tentativo in questa direzione fu portato avanti da Antonia Maury at Harvard che introdusse i simboli a, b ecc per alcuni tipi spettrali; sappiamo adesso che il suo tipo c corrisponde alle supergiganti e gli altri corrispondono alle nane.

4.2.1 Il sistema MK

Un sistema completamente bidimensionale, il sistema MK, fu sviluppato da Morgan, Keenan e Kellerman (1943). In aggiunta alla classe spettrale fu assegnato un numero da I a V indicante la luminosità. In termini fisici la luminosità della stella riflette le dimensioni dell'involuppo stellare e quindi si correla con la gravità di superficie della stella. Il sistema MK con le susseguenti revisioni ed estensioni è tuttora in uso. I pilastri fondamentali del sistema MK sono

- È empirico; nella sua definizione entrano solamente parametri osservativi
- È basato su materiale omogeneo. Usa spettri di dispersione standard che garantiscono criteri sensitivi e nello stesso tempo permettono di raggiungere stelle deboli ovvero sia le stelle più lontane.
- È definito da standard. Cosicché tutta la classificazione è autonoma, nel senso che rimane inalterata anche quando l'interpretazione dei tipi in termine di condizioni fisiche delle stelle cambia. Inoltre osservatori che adoperino spettrografi e dispersioni diverse possono classificare nello stesso sistema semplicemente riosservando le stelle campione con il loro equipaggiamento.

I tipi spettrali del sistema MK sono essenzialmente quelli della sequenza di Harvard, e alcune delle caratteristiche di ogni tipo sono riportate

nella tabella 4.2 Le classi di luminosità , e le stelle alle quali esse appartengono sono elencate nella tabella 4.3 Le caratteristiche menzionate nelle precedenti liste sono solo indicative ; il sistema è definito dalle stelle standard. Il tipo spettrale completo è specificato sia dai tipi spettrali sia dalla classe di luminosità di una stella come determinato da paragone con gli standard.

Il tipi spettrali sono suddivisi in tipi decimali, che vanno da 0 a 9, tipo B0,B1,B2.....,B9; A0,A1,A2.....,A9; F0,F1,...F9 e così via. Le classi di luminosità non sono usualmente suddivise eccetto le supergiganti, vedi tabella 4.3. Esempi di tipi spettrali sono : il Sole (G2V) , ϵ Ori(B0Ia), α Lyr (A0V), α Tau (K5II0 . Stelle più calde del sole (tipo O,B,A,F) sono comunemente chiamate stelle giovani e stelle di tipo solare e più fredde , stelle vecchie (tipo G,K,M). Anche se è esplicitamente bidimensionale, il sistema MK implica l' esistenza di una terza dimensione in regioni localizzate del sistema con l'idea di descrivere **stelle con linee deboli** . Come esempio citiamo la sub-nana HD 140283 , la stella variabile RR Lyrae e le stelle peculiari. Per fissare l'attenzione sulle osservazioni vere riportiamo in figura 4.4 gli spettri su lastra da O5 a B0 e in figura 4.5 gli spettri da B5 a A5.

Tabella 4.2: Caratteristiche principali dei tipi spettrali

<i>Tipo Spettrale</i>	<i>Caratteristiche spettrali</i>
<i>O</i>	<i>linee He II visibile; linee da specie molto ionizzate tipo ,C III, N III, O III, Si IV; linee H relativamente deboli; continuo UV forte</i>
<i>B</i>	<i>linee He I forte, massimo a B2; linee He II assenti; H in crescita; bassa eccitazione per gli ioni tipo ,C II, O II, Si II</i>
<i>A</i>	<i>H massimo ad A0 , decrescente poi; Mg II e Si II forti; Ca II debole e crescente</i>
<i>F</i>	<i>H debole ,Ca II in crescita , linee di atomi neutrali e primo stato di ionizzazione dei metalli</i>
<i>G</i>	<i>Spettro solare; Ca II molto forte; metalli neutrali prominenti ,ioni deboli; banda G (CH forte); linee H in indebolimento</i>
<i>K</i>	<i>Dominano le linee metalliche : H molto debole bande molecolari (CH, CN) in sviluppo; continuo debole nel blu</i>
<i>M</i>	<i>Bande molecolari forti ,in particolare Tio; alcune linee neutrali tipo Ca I molto forti; continuo nel rosso</i>
<i>C</i>	<i>Stelle al Carbonio; bande forti composti carbonio C₂, CN, CO; TiO assente; range di temperatura nelle stelle K ed M</i>
<i>S</i>	<i>Stelle con elementi pesanti; bande di ZrO, YO, LAo; atomi neutri forti come nei tipi K ed M; sovrappone questi tipi nel range di temperatura</i>

Tabella 4.3: Classificazione di luminosità MK

<i>Ia – O</i>	<i>Le supergiganti più estreme</i>
<i>Ia</i>	<i>Le supergiganti più luminose</i>
<i>Iab</i>	<i>Le supergiganti moderate</i>
<i>Ib</i>	<i>Le supergiganti meno luminose</i>
<i>II</i>	<i>Le giganti più brillanti</i>
<i>III</i>	<i>Le giganti normali</i>
<i>IV</i>	<i>Le sub – giganti</i>
<i>V</i>	<i>Le nane</i>

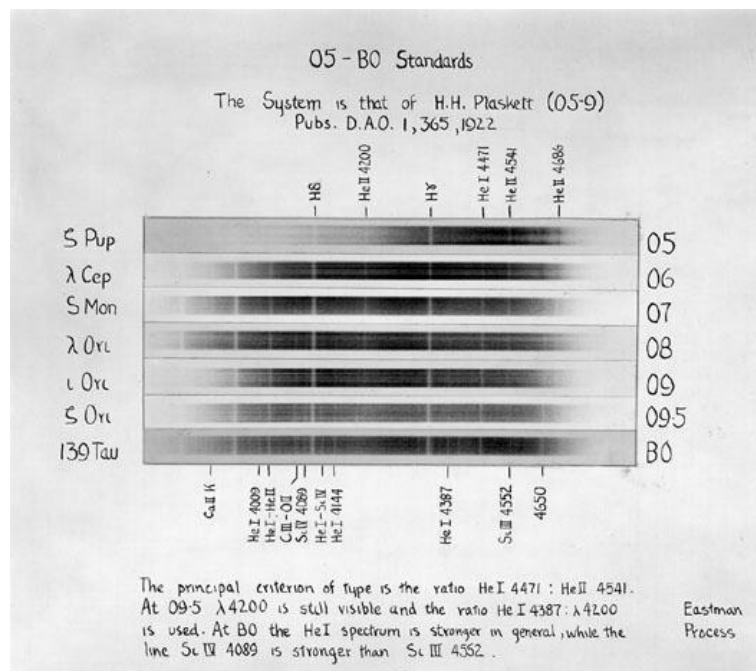


Figura 4.4: Gli spettri su lastra fotografica da O5 a B0.

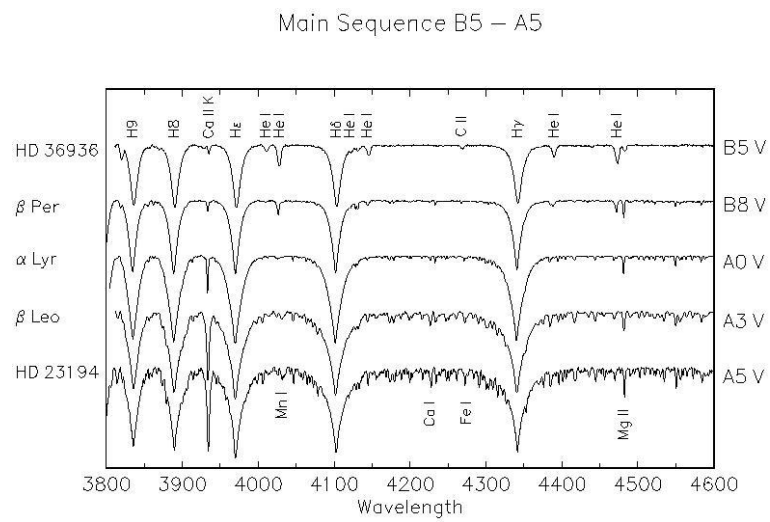


Figura 4.5: Gli spettri su digitale fotografica da B5 a A5.

Capitolo 5

Evoluzione Stellare

In questo capitolo si tratta di problemi inerenti allo studio della struttura e dell'evoluzione della stella. Si incomincia riassumendo le principali caratteristiche fisiche del sole, per poi analizzarne in dettaglio la struttura interna e generalizzare il discorso a tutte le stelle. In seguito si tratta della vita delle stelle partendo dalla descrizione della formazione stellare ed arrivando fino ad illustrare come muore un astro.

5.1 Il Sole - quadro generale

Prima di addentrarsi nello studio della struttura interna del sole, si vogliono riassumere le caratteristiche approssimate generali: Il diametro apparente visto dalla Terra a occhio nudo risulta

$$D_{\odot} = 32' \quad , \quad (5.1)$$

la distanza Terra-Sole è

$$d_{t-\odot} = 1.5^{13} cm \quad . \quad (5.2)$$

La massa che si ottiene con le leggi della meccanica

$$M_{\odot} = 2 \cdot 10^{33} g \quad , \quad (5.3)$$

Il raggio che si ottiene da distanza e diametro angolare è

$$R_{\odot} = 7 \cdot 10^{10} cm \quad , \quad (5.4)$$

da cui il volume risulta

$$V_{\odot} = 1.4 \cdot 10^{33} \text{ cm}^3 \quad , \quad (5.5)$$

e la densità

$$\rho_{\odot} = 1.4 \text{ g/cm}^3 \quad , \quad (5.6)$$

Si nota perciò che il sole è un corpo molto grande, ma poco denso. Esso irraggia continuamente e l'energia emessa al secondo è detta luminosità solare L_{\odot} : sulla terra giunge una certa energia per unità di superficie e di tempo F e se si tiene conto che l'irraggiamento è isotropo si capisce che l'energia sarà distribuita uniformemente sulla superficie sferica che ha come centro il Sole per cui si ha

$$L_{\odot} = 4 \pi d_{t-\odot}^2 F \quad (5.7)$$

e poichè il flusso di energia misurato vale , o costante solare è :

$$F = 2 \frac{\text{Cal}}{\text{cm min}} = 1.4 \cdot 10^6 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec}} \quad (5.8)$$

si ha

$$L_{\odot} = 4 \cdot 10^{33} \frac{\text{erg}}{\text{sec}} \quad (5.9)$$

La temperatura superficiale è determinata mediante la legge di Wien e risulta

$$T_{\odot} = 5800 \text{ K} \quad (5.10)$$

L'analisi delle righe di assorbimento permette di risalire agli elementi che compongono l'atmosfera stellare : X,Y,Z sono le frazioni di massa rispettivamente per idrogeno , elio e elementi pesanti. e si ha

$$X = 0.72 \quad Y = 0.72 \quad Z = 0.02 \quad . \quad (5.11)$$

Si noti infine che si definiscono elementi pesanti tutti quelli al di là dell'elio e che nell'atmosfera solare le frazioni di massa sono analoghe a quelle della crosta terrestre. Per coloro i quali vogliono avere i dati più precisi del sole riportiamo la seguente tabella estratta da [Nuovo Allen 2000].

Tabella 5.1: Tabella dei parametri del Sole

<i>Quantità</i>	<i>valore</i>	<i>unità</i>
<i>Raggio solare</i>	$(6.95508 \pm 0.00026) 10^{10}$	<i>cm</i>
<i>distanza terra – sole</i>	$1.495979 10^{13}$	<i>cm</i>
<i>Massa solare</i>	$1.989 10^{33}$	<i>g</i>
<i>Volume solare</i>	$1.4122 10^{33}$	<i>cm</i> ³
<i>densità</i>	1.409	<i>g cm</i> ⁻³
<i>costante solare</i>	$(1.365 - 1.369) 10^6$	<i>ergcm</i> ⁻² <i>s</i> ⁻¹
<i>Temperatura effettiva</i>	5777	<i>K</i>

5.2 Struttura del Sole

Visto che il Sole è stabile per tempi molto lunghi e che possiede forma sferica, per studiare la sua struttura si può ipotizzare che sia in equilibrio idrostatico e che goda di simmetria sferica. L' equilibrio idrostatico è espresso dalla legge di Stevino

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g \quad , \quad (5.12)$$

dove ρ è la pressione , r è il raggio e g la accelerazione di gravità . La gravità varia con il raggio e può essere espressa da

$$g(r) = G \frac{M(r)}{r^2} \quad , \quad (5.13)$$

dove $M(r)$ è la massa contenuta contenuta nel raggio r e G è la costante di gravitazione universale , da cui la (5.12) diviene, tenendo conto che anche la densità varia con il raggio

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{M(r)\rho(r)}{r^2} \quad , \quad (5.14)$$

che è l' *equazione di equilibrio statico* . Una seconda condizione che è valida nello studio della struttura solare è l' equazione di continuità: la massa di un guscio sferico di raggio sarà

$$dM = 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad . \quad (5.15)$$

A questo punto si può fare l' approssimazione, in una trattazione semplificata di densità costante ($\rho_{\odot} = 1.4 \text{ g/cm}^2$) per valutare la pressione centrale ρ_c . Si ha considerando che in superficie la pressione è nulla

$$\int_0^{\rho_c} d\rho = - \int_{R_{\odot}}^0 \rho g(r) dr \quad (5.16)$$

da cui

$$\rho_c = \int_0^{R_{\odot}} \rho G \frac{M(r)}{r^2} = \int_0^{R_{\odot}} \rho^2 G \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{1}{r^2} dr = \rho^2 G \frac{4}{3} \pi \frac{R_{\odot}^2}{2} = 1.3 \cdot 10^{15} \text{ dyne/cm}^2 \quad . \quad (5.17)$$

Ottenuta la pressione , si può calcolare la temperatura: il Sole e molte altre stelle approssimano bene le condizioni di gas perfetto , per cui si può scrivere l' equazione:

$$p = nKT \quad , \quad (5.18)$$

dove K è la costante di Boltzmann, T è la temperatura ed n il numero di particelle per unità di volume. Il problema è quindi di stabilire quante siano le n particelle libere per unità di volume nel Sole. Se esso fosse costituito soltanto da idrogeno , il numero di atomi per unità di volume sarebbe dato da n

$$n_1 = \frac{\rho}{A_1 H} X_1 \quad , \quad (5.19)$$

Appendice A

Costanti

Tabella A.1: Costanti Matematiche

Nome	Simbolo	Valore
Numero π	π	3.14159265358979323846
Numero e	e	2.71828182845904523536
Costante di Eulero	$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n 1/k - \ln(n) \right)$	0.5772156649

Tabella A.2: Costanti fondamentali

Il numero fra parentesi indica il valore numerico della incertezza standard riferito alle ultime cifre del risultato riportato.

Nome	Simbolo	Valore
Carica elementare	e	$1.602176462(63) \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Cos. Gravitazionale	G, κ	$6.673(10) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
Cos. struttura fine	$\alpha = e^2/2hc\varepsilon_0$	$\approx 1/137$
Velocità luce nel vuoto	c	$299792458 \cdot 10^8 \text{ m/s (def)}$
Permittività del vuoto	ε_0	$8.854187817 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$
Permeabilità del vuoto	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$
$(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$		$8.9876 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$
Cos. Planck	h	$6.62606876(52) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Cos. Dirac	$\hbar = h/2\pi$	$1.0545727 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
magnetone di Bohr	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$9.27400899(37 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$
raggio di Bohr	a_0	$0.5291772083(19) \text{ Å}$
Cos. Rydberg	Ry	$13.605\,691\,72(53) \text{ eV}$
λ elettrone Compton	$\lambda_{Ce} = h/m_e c$	$2.426310215(18) \cdot 10^{-12} \text{ m}$
λ protone Compton	$\lambda_{Cp} = h/m_p c$	$1.321409847(10) \cdot 10^{-15} \text{ m}$
Cos. Stefan-Boltzmann	σ	$5.670400(40) \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$
Cos. Wien	k_W	$2.8977686(51) \cdot 10^{-3} \text{ mK}$
Cos. molare dei gas	R	$8.314\,472(15) \text{ J/mol}$
Cos. Avogadro	N_A	$6.02214199(47) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Cos. Boltzmann	$k = R/N_A$	$1.3806503(24) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
massa elettrone	m_e	$9.10938188(72) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
massa protone	m_p	$1.67262158(13) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
massa neutrone	m_n	$1.67492716(13) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
unità di massa elem.	$m_u = \frac{1}{12}m(^{12}_6\text{C})$	$1.6605656 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
magnetone nucleare	μ_N	$5.05078317(20) \cdot 10^{-27} \text{ J/T}$

Tabella A.3: Costanti Astronomiche

Il numero fra parentesi indica il valore numerico della incertezza standard riferito alle ultime cifre del risultato riportato.

Nome	Simbolo	Valore	Unità
Raggio del Sole	R_{\odot}	$6.95508(20) \cdot 10^8$	m
Massa del Sole	M_{\odot}	$1.9891 \cdot 10^{30}$	kg
Periodo rotaz. Sole	T_{\odot}	25.38	days
Raggio della Terra	R_A	$6.378136 \cdot 10^6$	m
Massa della Terra	M_A	$5.9742 \cdot 10^{24}$	kg
Periodo rotaz. Terra	T_A	23.96	hours
Periodo orbitale della Terra	Tropical year	365.24219879	days
Unità Astronomica	AU	$1.4959787066 \cdot 10^{11}$	m
Anno luce	lj	$9.4605 \cdot 10^{15}$	m
Parsec	pc	$3.0857 \cdot 10^{16}$	m
Cos. di Hubble	H	$\approx 75(25)$	$\text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$

Appendice B

Calibrazioni

Table 15.7. Calibration of MK spectral types.

S_p	$M(V)$	$B - V$	$U - B$	$V - R$	$R - I$	T_{eff}	BC
MAIN SEQUENCE, V							
O5	-5.7	-0.33	-1.19	-0.15	-0.32	42 000	-4.40
O9	-4.5	-0.31	-1.12	-0.15	-0.32	34 000	-3.33
B0	-4.0	-0.30	-1.08	-0.13	-0.29	30 000	-3.16
B2	-2.45	-0.24	-0.84	-0.10	-0.22	20 900	-2.35
B5	-1.2	-0.17	-0.58	-0.06	-0.16	15 200	-1.46
B8	-0.25	-0.11	-0.34	-0.02	-0.10	11 400	-0.80
A0	+0.65	-0.02	-0.02	0.02	-0.02	9 790	-0.30
A2	+1.3	+0.05	+0.05	0.08	0.01	9 000	-0.20
A5	+1.95	+0.15	+0.10	0.16	0.06	8 180	-0.15
F0	+2.7	+0.30	+0.03	0.30	0.17	7 300	-0.09
F2	+3.6	+0.35	0.00	0.35	0.20	7 000	-0.11
F5	+3.5	+0.44	-0.02	0.40	0.24	6 650	-0.14
F8	+4.0	+0.52	+0.02	0.47	0.29	6 250	-0.16
G0	+4.4	+0.58	+0.06	0.50	0.31	5 940	-0.18
G2	+4.7	+0.63	+0.12	0.53	0.33	5 790	-0.20
G5	+5.1	+0.68	+0.20	0.54	0.35	5 560	-0.21
G8	+5.5	+0.74	+0.30	0.58	0.38	5 310	-0.40
K0	+5.9	+0.81	+0.45	0.64	0.42	5 150	-0.31
K2	+6.4	+0.91	+0.64	0.74	0.48	4 830	-0.42
K5	+7.35	+1.15	+1.08	0.99	0.63	4 410	-0.72
M0	+8.8	+1.40	+1.22	1.28	0.91	3 840	-1.38
M2	+9.9	+1.49	+1.18	1.50	1.19	3 520	-1.89
M5	+12.3	+1.64	+1.24	1.80	1.67	3 170	-2.73
GIANTS, III							

Figura B.1: Calibrazione MK classe V, sequenza principale

GIANTS, III							
G5	+0.9	+0.86	+0.56	0.69	0.48	5 050	-0.34
G8	+0.8	+0.94	+0.70	0.70	0.48	4 800	-0.42
K0	+0.7	+1.00	+0.84	0.77	0.53	4 660	-0.50
K2	+0.5	+1.16	+1.16	0.84	0.58	4 390	-0.61
K5	-0.2	+1.50	+1.81	1.20	0.90	4 050	-1.02
M0	-0.4	+1.56	+1.87	1.23	0.94	3 690	-1.25
M2	-0.6	+1.60	+1.89	1.34	1.10	3 540	-1.62
M5	-0.3	+1.63	+1.58	2.18	1.96	3 380	-2.48

Figura B.2: Calibrazione MK classe III , giganti

Table 15.7. (Continued.)

Sp	$M(V)$	$B - V$	$U - B$	$V - R$	$R - I$	T_{eff}	BC
SUPERGIANTS, I							
O9	-6.5	-0.27	-1.13	-0.15	-0.32	32 000	-3.18
B2	-6.4	-0.17	-0.93	-0.05	-0.15	17 600	-1.58
B5	-6.2	-0.10	-0.72	0.02	-0.07	13 600	-0.95
B8	-6.2	-0.03	-0.55	0.02	0.00	11 100	-0.66
A0	-6.3	-0.01	-0.38	0.03	0.05	9 980	-0.41
A2	-6.5	+0.03	-0.25	0.07	0.07	9 380	-0.28
A5	-6.6	+0.09	-0.08	0.12	0.13	8 610	-0.13
F0	-6.6	+0.17	+0.15	0.21	0.20	7 460	-0.01
F2	-6.6	+0.23	+0.18	0.26	0.21	7 030	-0.00
F5	-6.6	+0.32	+0.27	0.35	0.23	6 370	-0.03
F8	-6.5	+0.56	+0.41	0.45	0.27	5 750	-0.09
G0	-6.4	+0.76	+0.52	0.51	0.33	5 370	-0.15
G2	-6.3	+0.87	+0.63	0.58	0.40	5 190	-0.21
G5	-6.2	+1.02	+0.83	0.67	0.44	4 930	-0.33
G8	-6.1	+1.14	+1.07	0.69	0.46	4 700	-0.42
K0	-6.0	+1.25	+1.17	0.76	0.48	4 550	-0.50
K2	-5.9	+1.36	+1.32	0.85	0.55	4 310	-0.61
K5	-5.8	+1.60	+1.80	1.20	0.90	3 990	-1.01
M0	-5.6	+1.67	+1.90	1.23	0.94	3 620	-1.29
M2	-5.6	+1.71	+1.95	1.34	1.10	3 370	-1.62
M5	-5.6	+1.80	+1.60	2.18	1.96	2 880	-3.47

Figura B.3: Calibrazione MK classe I , supergiganti

Table 15.8. *Calibration of MK spectral types.^a*

Sp	$\mathcal{M}/\mathcal{M}_{\odot}$	R/R_{\odot}	$\log(g/g_{\odot})$	$\log(\bar{\rho}/\bar{\rho}_{\odot})$	v_{rot} (km s ⁻¹)
MAIN SEQUENCE, V					
O3	120	15	-0.3	-1.5	
O5	60	12	-0.4	-1.5	
O6	37	10	-0.45	-1.45	
O8	23	8.5	-0.5	-1.4	200
B0	17.5	7.4	-0.5	-1.4	170
B3	7.6	4.8	-0.5	-1.15	190
B5	5.9	3.9	-0.4	-1.00	240
B8	3.8	3.0	-0.4	-0.85	220
A0	2.9	2.4	-0.3	-0.7	180
A5	2.0	1.7	-0.15	-0.4	170
F0	1.6	1.5	-0.1	-0.3	100
F5	1.4	1.3	-0.1	-0.2	30
G0	1.05	1.1	-0.05	-0.1	10
G5	0.92	0.92	+0.05	-0.1	< 10
K0	0.79	0.85	+0.05	+0.1	< 10
K5	0.67	0.72	+0.1	+0.25	< 10
M0	0.51	0.60	+0.15	+0.35	
M2	0.40	0.50	+0.2	+0.8	
M5	0.21	0.27	+0.5	+1.0	
M8	0.06	0.10	+0.5	+1.2	

Figura B.4: Calibrazione MK parametri fisici

Bibliografia

- [Nuovo Allen 2000] N.Cox , Editore , “Allen’s Astrophysical Quantities, prima edizione, it Springer Verlag , Berlino (2000)
- [Biermann et al. 2002] M.L. Biermann ,D.M. Katz ,R. Aho , J. Diaz Barriga , J.Petron, “Wien’s Law an the Temperature of the Sun” , The Physics Teacher , Vol 40 , Ottobre 2002, pag. 398
- [Heath 1991] Sir Thomas L. Heat , “Greek Astronomy, prima edizione, *Dover* , Mineola (1991).
- [Astrophysical Formulae 1999] K.R. Lang , “Astrophysical Formulae, terza edizione, it Springer Verlag , Berlino (1999)
- [Marchetti 1990] G. Marchetti , “Appunti di Astronomia , Torino (1990)
- [Sparke et al. 2000] L.S. Sparke and J. Gallagher, “Galaxies in the Universe, prima edizione, *Cambridge University Press* , Cambridge (2000).

Indice analitico

A

Aristarco, 1

B

B-V controT

numerico, 45

osservato, 40

teorico, 45

BC

e T, 42

e T teorico analitico , 47

e T teorico numerico , 46

bolometro, 42

brillanza, 15

C

Cannon, 67

coefficiente

assorbimento, 17

emissione, 16

conservazione

energia, 10

correzione

bolometrica, 41, 47

D

definizione

parsec, 7

densità

energia, 13

diagramma

HR 100pc, 48

HR Iadi, 50

HR Palomar12, 51

HR Pleiadi, 50

UB-BV classe V, 52

UB-BV stelle brillanti, 52

distanza

terra-luna, 3

terra-sole, 1

Draper, 67

E

energia

livelli, 58

spin orbita, 62

transizione, 60

equazione

trasferimento radiativo, 18

Eratostene, 3

F

filtri fotometrici, 36

flusso, 16

radiazione, 10, 12

totale, 12

forza radiazione, 22

funzione di risposta

CCD, 37

definizione, 37

H

Hertzprung, 48

I

IAU, 7

Intensità

specifica, 11

intensità

raggi, 14

Ipparco, 35

L

larghezza linea, 64

Legge di

Kirchhoff, 24

Planck, 27

Rayleigh-Jeans, 28

Stefan, 43

Wien, 29

Wien-spostamento, 30

libero cammino medio, 22

livello

fondamentale, 58

luminosità

sole, 43

stella, 43

M

M-L, 54

A0, 54

binarie, 54

teorica, 56

magnitudine

apparente, 35, 40

assoluta, 40

bolometrica, 41, 47

bolometrica sole, 43

taratura, 36

massa

sole, 5

stellare, 44

Maury, 67

mezzo

otticamente sottile, 20

otticamente spesso, 20

MK

classificazione, 68

luminosità, 69

N

notazione

spettroscopica, 61

P

parallasse, 6

parsec, 7

Pogson, 36

pressione

radiazione, 14

profondità

ottica, 19

profondità ottica, 22

R

radiazione corpo nero, 23

raggio

orbitale, 58

sole, 5

stellare, 44

Russel, 48

S

Secchi, 66

sensibilità occhio, 35

serie

Balmer, 60

Lyman, 60

Paschen, 60

sorgente
 radiazione, 20

spettro
 Planck, 25
 solare, 33, 34

T

Tabella
 max min 100pc, 47
 Sole, 74
 UBVRI, 36
temperatura
 effettiva, 32
temperatura
 di brillantezza, 31
 di colore, 32
temperatura effettiva, 39

U

UA, 3

V

vita media
 giganti blu, 55
 nane rosse, 55